

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 Terza Prova Intermedia di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2008-2009 - Rovereto, 19/12/2008

Compito (A)

1) Poniamo $f(x) = (x-1)^3 + 4x - 2$ per $x \in [0, 1]$. f è una funzione continua (combinazione di funzioni continue e somme di funzioni continue); inoltre $f(0) = -3 < 0$ e $f(1) = 2 > 0$. Per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 \in]0, 1[$ t.c. $f(x_0) = 0$, ossia x_0 è soluzione dell'eq. $(x-1)^3 = -4x + 2$.

Essa è unica, poiché f è crescente (essendo $(x-1)^3$ e $4x-2$ due funzioni crescenti). Consideriamo ora $a_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ e abbiamo $f(a_1) = (-\frac{1}{2})^3 + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{8} < 0$; prendiamo inoltre $a_2 = \frac{1+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$ e abbiamo $f(a_2) = (-\frac{1}{4})^3 + 4 \cdot \frac{3}{4} - 2 = -\frac{1}{64} + 1 > 0$. Possiamo scegliere dunque $]a, b[=]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ e abbiamo $b-a = \frac{1}{4}$ e $x_0 \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$. ■

metodo della bisezione

$$2) i) \sum_{n=1}^5 \int_n^{n+1} \frac{1}{x+1} dx = \sum_{n=1}^5 [\log|x+1|]_n^{n+1} = \sum_{n=1}^5 [\log(n+2) - \log(n+1)] =$$

$$= (\log 3 - \log 2) + (\log 4 - \log 3) + \dots + (\log 7 - \log 6) = \log 7 - \log 2$$

$$= \log \frac{7}{2}.$$

$$\sum_{k=1}^4 \frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{-2}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} = -2 + 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$ii) \int_2^3 \frac{x^4 + x e^x}{x} dx = \int_2^3 (x^3 + e^x) dx = \left[\frac{x^4}{4} + e^x \right]_2^3 = \left(\frac{81}{4} + e^3 \right) - \left(\frac{16}{4} + e^2 \right)$$

$$= \frac{65}{4} + e^3 - e^2$$

$$\int_0^1 (\sqrt{x+1} + |x+1|) dx = \int_0^1 ((x+1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)) dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1 =$$

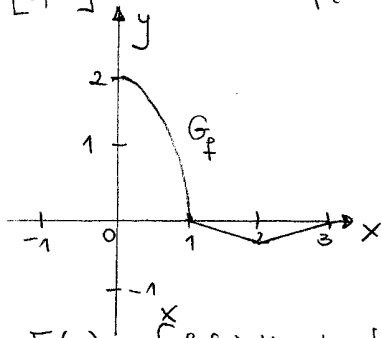
$|x+1| = (x+1)$ su $[0, 1]$ poiché $x+1 \geq 0$ su $[-1, +\infty[$

$$= \left(\frac{2(\sqrt{2})^3}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 \left(e^{-2x} + \frac{e^x}{e^x+1} \right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 -2e^{-2x} dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx = -\frac{1}{2} \left[e^{-2x} \right]_0^1 + \left[\log|e^x+1| \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1) + (\log(e+1) - \log 2) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) + \log\left(\frac{e+1}{2}\right).$$

iii) $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4}|x-2| - \frac{1}{4} & \text{se } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$



Sia $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ la funzione integrale definita su $[0, 3]$.

Dall'interpretazione geometrica dell'integrale segue subito che $F(x)$ è una funzione crescente su $[0, 1]$ (e $F(0)=0$) ed è decrescente su $[1, 3]$ (usando il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x) \forall x \in [0, 3]$ e quindi $F'(x) > 0$ su $]0, 1[$ e $F'(x) < 0$ su $]1, 3[$). Quindi $\max_{[0, 3]} F(x) = F(1) = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (-2t^2 + 2) dt = \left[-2\frac{t^3}{3} + 2t \right]_0^1 = -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}$.

Infine $F(3) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^3 f(t) dt = \frac{4}{3} - \left(2 \cdot \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{12}$

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = (x-1)e^{2x}$

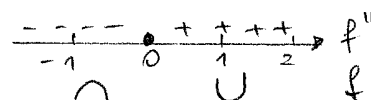
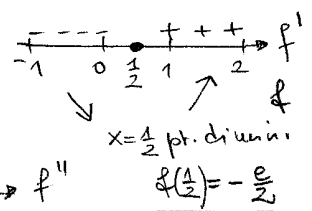
i) $\begin{array}{c} - - - - - \\ -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \\ + + + + + \end{array} f$ Nota: $e^{2x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)}{e^{-2x}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$;

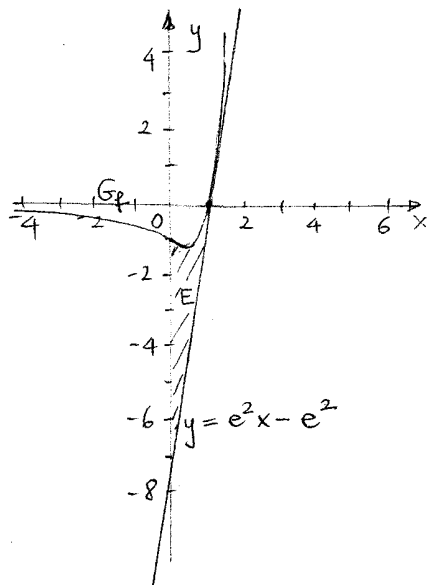
f è continua, perché composizione e prodotto di funz. continue;

dom $f' = \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} = (2x-1)e^{2x}$

dom $f'' = \mathbb{R}$, $f''(x) = 2e^{2x} + (2x-1)e^{2x} \cdot 2 = 4xe^{2x}$



$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}$



ii) Poiché $f'(1) = e^2$, si ha che l'eq. della retta tg. al grafico di f nel pr. $(1, 0)$ è $y = 0 + e^2(x-1)$, ossia

$$y = e^2x - e^2.$$

□

iii) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} (x - \frac{3}{2})$ è derivabile e

$$F'(x) = \cancel{\frac{e^{2x}}{2}} (x - \frac{3}{2}) + \frac{e^{2x}}{2} = e^{2x} (x - 1) = f(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$; quindi F è una primitiva

di f .

□

$$\begin{aligned} \text{iv) area } E &= \int_0^1 (f(x) - (e^2x - e^2)) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 (e^2x - e^2) dx \\ &= F(1) - F(0) - \left[e^2 \frac{x^2}{2} - e^2 x \right]_0^1 = \left[\frac{e^2}{2} (1 - \frac{3}{2}) - \frac{e^0}{2} (-\frac{3}{2}) \right] - \\ &\quad - \left[e^2 \cdot \frac{1}{2} - e^2 \right] = -\frac{e^2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{e^2}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}(e^2 + 3)}}. \end{aligned}$$

↑
Tomicelli

$$4) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$;

• Poiché $x^2 + x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$, si ha che $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

$y=1$ asint. orizzont. per f ($x \rightarrow -\infty, x \rightarrow +\infty$)

$x=0$ asint. verticale per f ($x \rightarrow 0^-, x \rightarrow 0^+$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 1 \end{aligned}$$

(infatti $\frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1$)

(infatti $\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} +\infty$)
 $\frac{x^2 + x + 1}{x^2}$ infinitesimo positivo

} analog. ai limiti precedenti;

• f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, poiché somma e rapporto di funzioni continue;

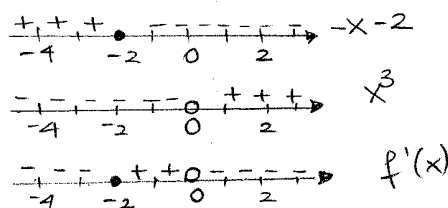
• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)x^2 - (x^2+x+1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^2 + x - 2x^2 - 2x - 2}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{-x-2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2, \text{ pt. where df}$$

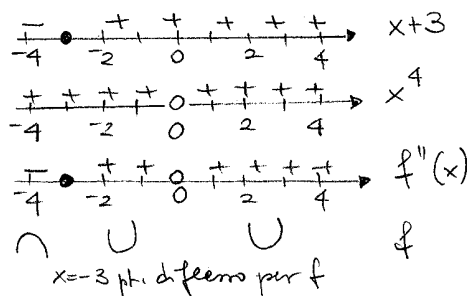
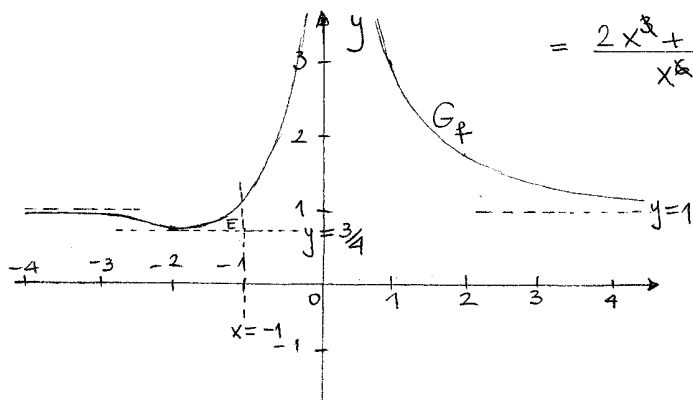
$$f(-2) = \frac{4-2+1}{4} = \frac{3}{4}$$



$x = -2$ pt. di min. loc. stretto per f

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f''(x) = \frac{-1(x^3) - (-x-2)3x^2}{x^6} = \frac{-x^3 + 3x^3 + 6x^2}{x^6}$

$$= \frac{2x^3 + 6x^2}{x^4} = \frac{2(x+3)}{x^4}$$



$$\therefore \text{ii) } \min_{[-3, -1]} f = f(-2) = \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \quad ; \quad \max_{[-3, -1]} f = f(-1) = \underline{\underline{1}} .$$

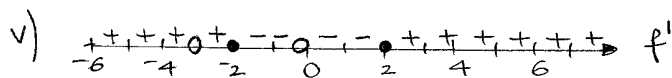
$$\begin{aligned} \text{iii) area E} &= \int_{-2}^{-1} \left(f(x) - \frac{3}{4} \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2} - \frac{3}{4} \right) dx = \\ &= \int_{-2}^{-1} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx = \\ &= \left[\frac{x}{4} + \log|x| - x^{-1} \right]_{-2}^{-1} = \left[\left(-\frac{1}{4} + \cancel{\log 1} + 1 \right) - \left(-\frac{2}{4} + \log|-2| + \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{4} - \log 2}}. \end{aligned}$$

5) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$

ii) $x = -3$ ($\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$) ; $x = 0$ ($\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$), $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ $\square$

iii)  &

- iv) $y=0$ asint. orizzontale per f (per $x \rightarrow -\infty$)
 $y=3$ asint. orizzontale per f (per $x \rightarrow +\infty$). □

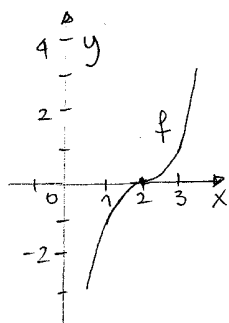


- vi) $x=-3$ pt. di min. loc. per f
 $x=2$ pt. di min. loc. per f ;
 $x=-2$ pt. di max. loc. per f
 $x=0$ pt. di max. loc. per f . ■

- 6) a) V : Infatti $f'(x) < 0$ in $]0, 2[\Rightarrow f$ decrescente in $]0, 2[$;
 poiché $f(0) = 0$ allora $f(x) < 0$ in $]0, 2[$
 e quindi $\int_0^2 f(x) dx < 0$; □

- b) V : Essendo f continua in $[0, 5]$, per il teorema di Weierstrass esistono massimo e minimo di f in $[0, 5]$ e $\min_{[0, 5]} f \leq f(x) \leq \max_{[0, 5]} f \quad \forall x \in [0, 5]$; □

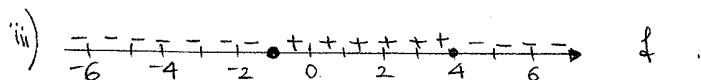
- c) F : $f'(2) = 0$ è solo una condiz. nec. ma non sufficiente affinché $x=2$ è un pt. di massimo o di minimo locale per f ; esempio
 $f(x) = (x-2)^3$ in $[0, 5]$ soddisfa $f'(2) = 0$,
 ma $x=2$ non è né un pt. di massimo loc.
 né un pt. di minimo loc. per f . ■



Compito (B)

1) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -2$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

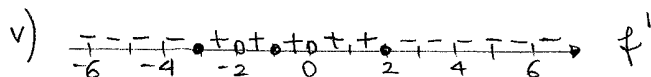
ii) $x = -2$ ($\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$); $x = 0$ ($\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$).



iv) $y = 0$ asint. orizzontale per f (per $x \rightarrow -\infty$)

$x = 0$ asint. verticale per f (per $x \rightarrow 0^-$)

$y = -2$ asint. orizzontale per f (per $x \rightarrow +\infty$).



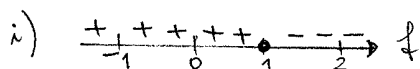
vi) $x = -3$ pt. di min. loc. per f

$x = 0$ pt. di min. loc. per f ;

$x = 2$ pt. di max. loc. per f .

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = (1-x)e^{2x}$

(oss: questa funzione è - la funt. data in compito (A) Es.3)



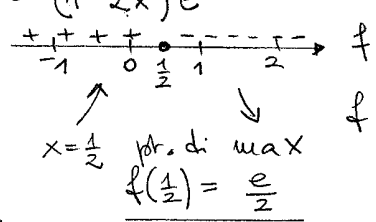
Nota: $e^{2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x)}{e^{-2x}} = 0$ ($\frac{\infty}{\infty}$)

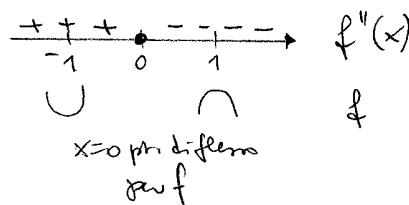
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

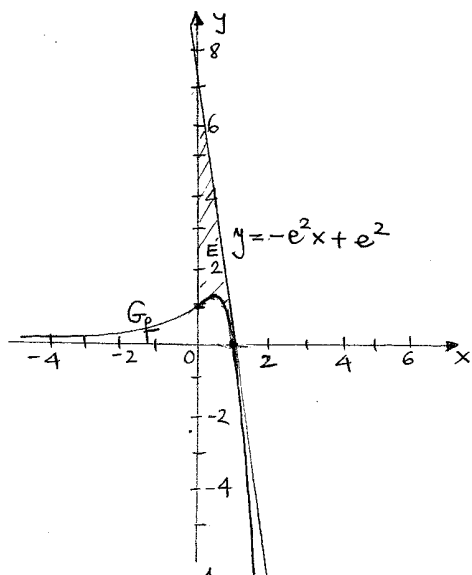
f è continua, perché composizione e prodotto di funt. continue;

$\text{dom } f' = \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{2x} + 2(1-x)e^{2x} = (1-2x)e^{2x}$



$\text{dom } f'' = \mathbb{R}$, $f''(x) = -2e^{2x} + (1-2x)e^{2x} \cdot 2$
 $= -4xe^{2x}$





ii) Poiché $f'(1) = -e^2$, si ha che l'eq. della
retta tg. al grafico di f nel pt. $(1,0)$ è
 $y = 0 - e^2(x-1)$, ossia

$$y = -e^2x + e^2.$$

□

iii) $F(x) = \frac{e^{2x}}{2} \left(\frac{3}{2} - x \right)$ è derivabile e
 $F'(x) = \frac{e^{2x}}{2} \left(\frac{3}{2} - x \right) - \frac{e^{2x}}{2} = e^{2x} \left(\frac{3}{4} - x \right) = f(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$; quindi F è una primitiva di f .

$$\begin{aligned} \text{iv) area } E &= \int_0^1 \left[(-e^2x + e^2) - f(x) \right] dx = \int_0^1 (-e^2x + e^2) dx - \int_0^1 f(x) dx \\ &= \left[-\frac{e^2}{2}x^2 + e^2x \right]_0^1 - [F(1) - F(0)] = \left(-\frac{e^2}{2} + e^2 \right) - \left[\frac{e^2}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right] \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 3). \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} 3) \text{ i) } \sum_{n=1}^6 \int_{n-1}^n \frac{1}{x+2} dx &= \sum_{n=1}^6 \left[\log|x+2| \right]_{n-1}^n = \sum_{n=1}^6 [\log(n+2) - \log(n+1)] = \\ &= (\log 3 - \log 2) + (\log 4 - \log 3) + \dots + (\log 8 - \log 7) = \log 8 - \log 2 \\ &= \log \frac{8}{2} = \log 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^4 \frac{(-1)^{m+1} 3^{-m}}{(m-1)!} &= \sum_{m=1}^4 \frac{(-1)^{m+1}}{3^m (m-1)!} = \frac{(-1)^2}{3 \cdot 0!} + \frac{(-1)^3}{3^2 \cdot 1!} + \frac{(-1)^4}{3^3 \cdot 2!} + \frac{(-1)^5}{3^4 \cdot 3!} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{54} - \frac{1}{81 \cdot 6}. \end{aligned}$$

□

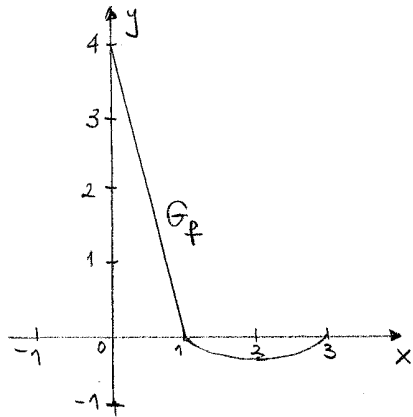
$$\begin{aligned} \text{ii) } \int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x} - x^2 e^x}{x^2} dx &= \int_1^2 \left(x^{-\frac{5}{3}} - e^x \right) dx = \left[\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} - e^x \right]_1^2 = \left[\left(\frac{3}{2} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} - e^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{3}{2} - e \right) \right] = \left[\left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{4}} - e^2 \right) + \frac{3}{2} + e \right] = -e^2 + e + \frac{3}{2} - \frac{3}{2\sqrt[3]{4}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} + |x+2| \right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx + \int_0^1 |x+2| dx = \frac{1}{2} [\log|x^2+1|]_0^1 \\ &\quad + \int_0^1 |x+2| dx = \frac{1}{2} [\log 2 - \log 1] + \int_0^1 (x+2) dx \\ &\quad \text{poiché } x+2 \geq 0 \text{ su } [-2, +\infty[\\ &= \frac{1}{2} \log 2 + \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^1 = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(e^{-3x} + \frac{e^x}{e^x+2} \right) dx &= -\frac{1}{3} \int_0^1 3e^{-3x} dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2} dx = \\ &= -\frac{1}{3} \left[e^{-3x} \right]_0^1 + \left[\log(e^x+2) \right]_0^1 = -\frac{1}{3} [e^{-3} - 1] + [\log(e+2) - \log 3] \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{e^3} \right) + \log \left(\frac{e+2}{3} \right)}}. \end{aligned}$$

□

iii) $f: [0,3] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} -4|x|+4 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4} & \text{se } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$



Sia $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ la funzione integrale definita su $[0,3]$. Dall'interpretazione geometrica dell'integrale segue subito che $F(x)$ è una funzione crescente su $[0,1]$ (e $F(0)=0$) ed è decrescente su $[1,3]$ (usando il teorema

fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x) \forall x \in [0,3]$ e quindi $F'(x) > 0$ su $]0,1[$ e $F'(x) < 0$ su $]1,3[$). Quindi:

$$\begin{aligned} \max_{[0,3]} F(x) &= F(1) = \int_0^1 f(t) dt = \frac{1 \cdot 4^2}{2} = \underline{\underline{2}}. \text{ Infine } F(3) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^3 f(t) dt \\ &= 2 + \int_1^3 \left[\frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{4} \right] dt = 2 + \frac{1}{4} \left[\frac{(x-2)^3}{3} \right]_1^3 - \left[\frac{1}{4}x \right]_1^3 = 2 + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right] - \left[\frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{4} \right] = 2 + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}. \end{aligned}$$

■

4)i) $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2}$ (vedi anche compito (A), Esercizio 4)

- $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$;
- Poiché $x^2 - x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 0 \forall x \neq 0$, si ha che $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

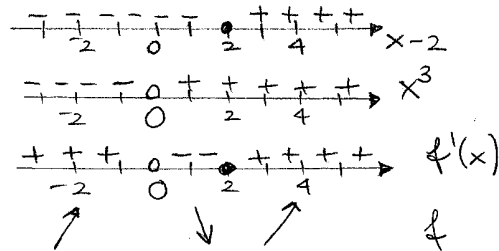
Si ha $y=1$ asintoto orizzontale per f (per $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$), e $x=0$ asintoto verticale per f (per $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow 0^+$);

- f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, poiché somma e rapporto di funzioni continue;
- $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f'(x) = \frac{(2x-1)x^2 - (x^2-x+1)2x}{x^4} = \frac{\cancel{2x^3} - x^2 - \cancel{2x^3} + 2x^2 - 2x}{x^4}$

$$= \frac{x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x-2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2, \text{ pt. critico di } f$$

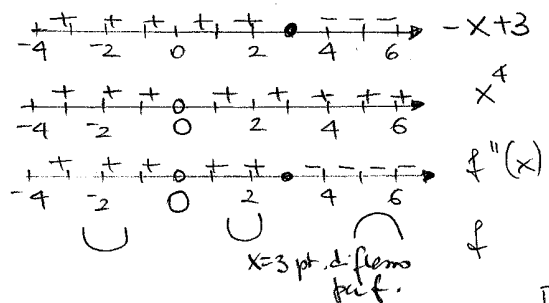
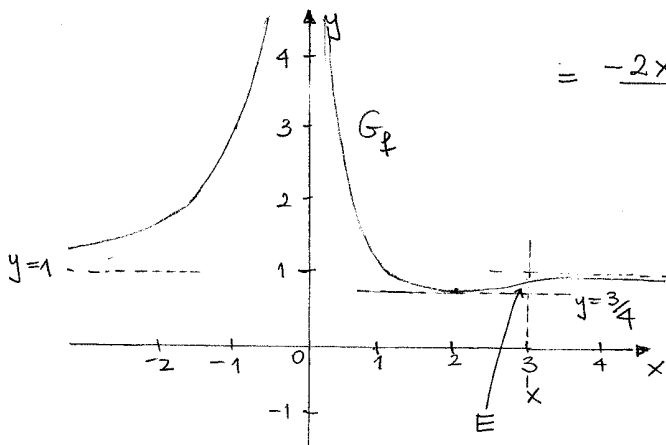
$$f(2) = \frac{4-2+1}{4} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$



$x=2$ pt. di min. loc. scelto per f

- $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f''(x) = \frac{1 \cdot x^3 - (x-2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^3 - 3x^3 + 6x^2}{x^6}$

$$= \frac{-2x^3 + 6x^2}{x^6} = \frac{2(-x+3)}{x^4}$$



$x=3$ pt. di flesso per f .

ii) $\min_{[1,3]} f = f(2) = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$ $\max_{[1,3]} f = f(1) = \underline{\underline{1}}$

iii) $\text{area } E = \int_2^3 (f(x) - \frac{3}{4}) dx = \int_2^3 \left(\frac{x^2-x+1}{x^2} - \frac{3}{4} \right) dx =$

$$= \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} \right) dx = \int_2^3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x}{4} - \log|x| - x^{-1} \right]_2^3 = \left[\left(\frac{3}{4} - \log 3 - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - \log 2 - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{12} + \log \frac{2}{3}}}$$

5) Poniamo $f(x) = (x+1)^3 + 3x + 2$ per $x \in [-1, 0]$. f è una funzione continua (combinazione di funzioni continue e somma di funzioni continue); inoltre $f(-1) = -3 + 2 = -1 < 0$ e $f(0) = 1 + 2 = 3 > 0$. Per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 \in]-1, 0[$ t.c. $f(x_0) = 0$, ossia x_0 è soluzione dell'eq. $(x+1)^3 = -3x - 2$.

Essa è unica, poiché f è crescente (essendo $(x+1)^3$ e $3x+2$ due funzioni crescenti). Per determinare un intervallo $]a, b[\subset]-1, 0[$ con $b-a \leq \frac{1}{4}$ che contiene la soluzione x_0 , applichiamo il metodo della bisezione.

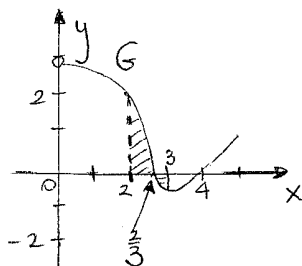
Consideriamo allora $a_1 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$ e abbiamo $f(a_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{8} > 0$; prendiamo inoltre $a_2 = \frac{-1-\frac{1}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$ e abbiamo $f(a_2) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{9}{4} + 2 = \frac{1}{64} - \frac{1}{4} < 0$. Possiamo scegliere dunque $]a, b[=]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$ e abbiamo $b-a \leq \frac{1}{4}$ e $x_0 \in]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$. ■

6) a) V : infatti, cond. nec. affinché $x=3$ sia pt. di massimo loc. per f derivabile in $]0, 5]$, è $f'(3) = 0$. □

b) F : non è sempre vero che f è limitata in $]0, 5]$ se f è continua e derivabile in $]0, 5]$. Basta prendere $f(x) = \frac{1}{x}$ in $]0, 5]$ e si ha $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. □

c) F : basta pensare ad una funzione f come nel grafico

sotto:



allora $\int_2^3 f(x) dx > 0$
ma $f(x) < 0$ in $]\frac{2}{3}, 3[$. ■