

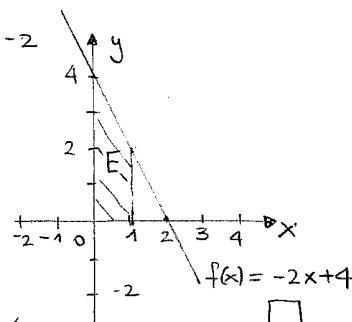
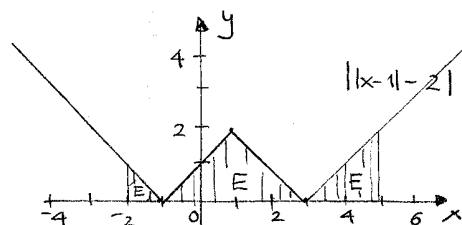
Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 Terza Prova Intermedia di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 Esame scritto di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2008 - 2009 - Rovereto, 12 gennaio 2009

Terza Prova Intermedia (A)

1) i) $\int_{-2}^5 ||x-1|-2| dx = \text{area E}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4 \cdot \frac{2}{2}}{2} + \frac{\frac{2}{2}}{2} = \frac{13}{2};$$

$$\int_0^1 (-2x+4) dx = \text{area E} = \frac{4+2}{2} \cdot 1 = 3.$$



ii) $\int_{-2}^{-1} \frac{1+x^2}{x} dx = \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x} + x \right) dx = \left[\log|x| + \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^{-1} = (\log 1 + \frac{1}{2}) - (\log 2 + 2) = -\frac{3}{2} - \log 2;$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx = \int_0^1 \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{e^x+1} dx = [e^x - x]_0^1 = (e-1) - (1-0) = e-2$$

2) i) $f(x) = \log(2x)$ $f^{(1)}(x) = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$; $f^{(2)}(x) = -\frac{1}{x^2}$; $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

$$\sum_{k=1}^4 f^{(k)}(1) = 1 - 1 + 2 - 6 = -4$$

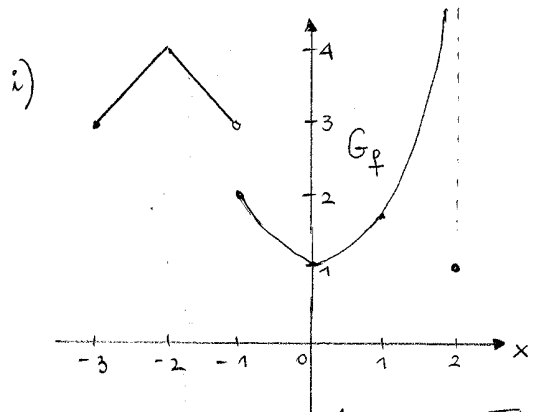
ii) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{9}{2}} f(x) dx + \dots + \int_{\frac{21}{2}}^{\frac{23}{2}} f(x) dx = \sum_{k=0}^5 \int_{\frac{4k+1}{2}}^{\frac{4k+3}{2}} f(x) dx$

iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 e^{-x}}{1 + 4x^m} = \begin{cases} +\infty & \text{se } m \in \{0, 1, 2\} \\ \frac{1}{4} & \text{se } m = 3 \\ 0 & \text{se } m > 3 \end{cases}$

poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$

3) $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -|x+2| + 4 & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ 2^{-x} & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{3}{4} & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$



ii) $x = -1$ pt. di discontinuità : $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 1$; $\square$

$x = 2$ pt. di discontinuità : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$, $f(2) = 1$;

$x = 2$ è asintoto verticale per f . $\square$

iii) $\int_{-3}^0 f(x) dx = \int_{-3}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx = 2 \left(\frac{4+3}{2} \right) + \int_{-1}^0 2^{-x} dx =$
 $= 7 - \frac{1}{\log 2} \int_{-1}^0 (-2^{-x} \log 2) dx = 7 - \frac{1}{\log 2} \left[2^{-x} \right]_{-1}^0 = 7 - \frac{1}{\log 2} + \frac{2}{\log 2} =$
 $= 7 + \frac{1}{\log 2}$ $\blacksquare$

4) $f(x) = (x-1)^3 e^x$

i) • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$; f è continua, poiché comp. e prod. di funzioni continue;

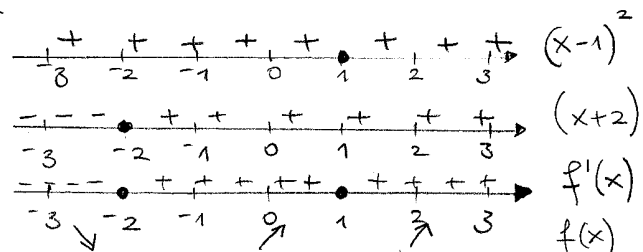
• segno di f
 $=$ segno di $(x-1)^3$ $f(x)$;
 poiché $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)^3 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3}{\frac{1}{e^{-x}}} = \frac{0}{+\infty} = 0$ $y=0$ è asintoto orizzontale per f (per $x \rightarrow -\infty$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^3 e^x = +\infty$;

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 3(x-1)^2 e^x + (x-1)^3 = e^x$
 $= e^x (x-1)^2 (3 + (x-1)) = e^x (x-1)^2 (x+2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$ pt. critici di f



Segue dunque che $x = -2$ è un pt. di minimo loc. stretto per f e

$$f(-2) = (-2-1)^3 e^{-2} = -\frac{27}{e^2} \quad (\approx -3.65)$$

Rimettar inoltre che il pt. critico $x = 1$ non è né di minimo né di massimo per f .

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = e^x (x-1)^2 (x+2) + e^x \cdot 2(x-1)(x+2) + e^x (x-1)^2$

$$= e^x (x-1) \left[(x-1)(x+2) + 2(x+2) + (x-1) \right] =$$

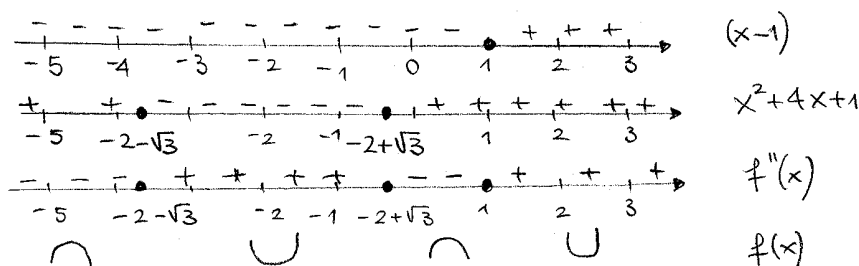
$$= e^x (x-1) \left[x^2 + x - 2 + 2x + 4 + x - 1 \right] =$$

$$= e^x (x-1) (x^2 + 4x + 1)$$

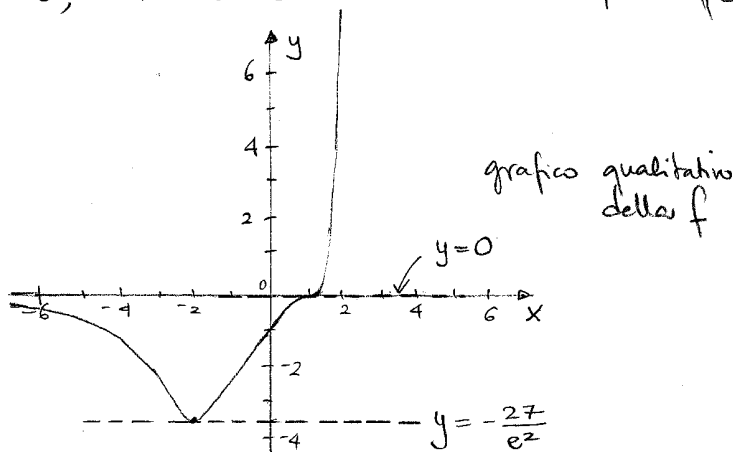
Notiamo che $x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$$= -2 \pm \sqrt{3};$$

dunque



I pt. $x = -2 - \sqrt{3}$, $x = -2 + \sqrt{3}$ e $x = 1$ sono pt. di flesso per f .

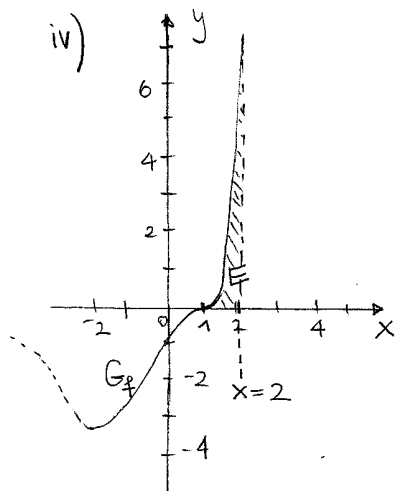


ii) $y = -\frac{27}{e^2}$, $y = 0$ sono le eq. delle rette tangenti al grafico di f che sono rette orizzontali. □

iii) Sia $F(x) = e^x [(x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 6(x-1) - 6]$; allora $F(x)$ è derivabile in $\mathbb{R}$ (composizione, somma, prodotto di funzioni derivabili in $\mathbb{R}$). Inoltre $F'(x) = e^x [(x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 6(x-1) - 6] + e^x [3(x-1)^2 - 6(x-1) + 6]$

$$= e^x (x-1)^3 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

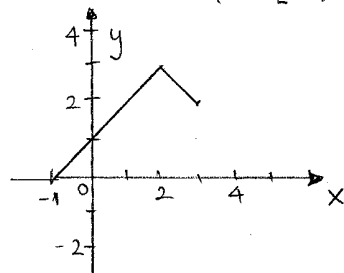
Quindi $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in $\mathbb{R}$. □



$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1) = \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{teor. Torricelli} \\ &= e^2 \left[(1 - 3 + \cancel{6} - \cancel{6}) \right] - e \left[-6 \right] \\ &= -2e^2 + 6e = \underline{\underline{2e(3-e)}}. \end{aligned}$$

5) a) (V) : segue dal teorema di esistenza degli zeri; □

b) (F) : infatti, la funzione f è continua in $[-1, 3]$, ma non necessariamente derivabile. Esempio : $f(x) = -|x-2| + 3$ è continua in $[-1, 3]$, $\max_{[-1, 3]} f = f(2)$, ma $\nexists f'(2)$;



c) (V) : infatti, dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [-1, 3]$ e quindi $F'(1) = f(1) = 0$; dunque $x=1$ è un pt. critico per $F(x)$. □

6) $P_{24} = \underline{\underline{24!}}$ ■