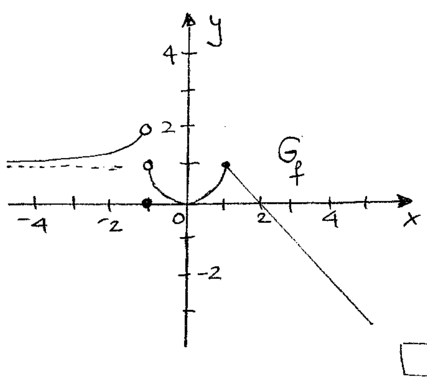
Università degli Studi di Trento — Facoltà di Scienze Cognitive
CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
Verifica settimanale di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
a.a. 2008-2009 — Rovereto, 24 - 28/11/08

1) Poniamo $f(x) = 3^x + 4x - 2$. Osserviamo che f è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}$, in particolare è continua su $[0,1]$. Inoltre $f(0) = 3^0 - 2 = -1 < 0$, $f(1) = 3^1 + 4 - 2 = 5 > 0$. Per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 \in]0,1[$ tale che $f(x_0) = 0$, e quindi x_0 è soluzione dell'eq. $3^x = -4x + 2$.
Osserviamo inoltre che 3^x è una funzione crescente, come lo è anche la funzione $4x-2$; essendo la somma di funzioni crescenti una funzione crescente, abbiamo che $f(x)$ è crescente. Quindi x_0 è l'unico zero della funzione $f(x)$.
Applichiamo ora il metodo della bisezione per determinare un intervallo $]a,b[\subset [0,1]$ con $b-a \leq \frac{1}{4}$ ed $x_0 \in]a,b[$.
Consideriamo $a_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ (pt. medio dell'intervallo $[0,1]$)
Abbiamo $f(a_1) = \sqrt{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 = \sqrt{3} > 0$. Possiamo allora dire che sicuramente $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$. Prendiamo allora $a_2 = \frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ (pt. medio dell'intervallo $[0, \frac{1}{2}]$); abbiamo $f(a_2) = \sqrt[4]{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} - 2 = \sqrt[4]{3} - 1 > 0$ (nota: $\sqrt[4]{3} > \sqrt[4]{1} = 1$ e quindi $\sqrt[4]{3} - 1 > 0$).
Possiamo concludere che $x_0 \in]0, \frac{1}{4}[$ e quindi, ponendo $]a,b[=]0, \frac{1}{4}[$, abbiamo quanto si vuole. $\blacksquare$

2) i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + 1 & \text{se } x < -1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ x^2 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ -|x-1| + 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$



$\square$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{x+1}+1\right) = \underline{\underline{1}}$; $\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-}\left(e^{x+1}+1\right) = \underline{\underline{2}}$;

$\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} x^2 = \underline{\underline{1}}$; $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(-|x-1|+1\right) = \underline{\underline{1}}$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-|x-1|+1\right) = \underline{\underline{-\infty}}$. □

ii) Osserviamo che $\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} x^2 = 1$; $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(-|x-1|+1\right) = 1$; quindi $\lim_{x\to1} f(x) = 1$. Poiché inoltre $f(1)=1$, si ha che f è continua in $x=1$. ■

3) i) $\lim_{x\to3^+}\left(x^2+2\right) = \underline{\underline{11}}$; $\lim_{x\to1^+}\left(\sqrt[3]{x+1}+\log_2 x\right) = \underline{\underline{\sqrt[3]{2}}}$;

$\lim_{x\to1^+} \frac{1}{x^2-1} = \underline{\underline{+\infty}}$ (poiché, per $x\to1^+$, si ha x^2-1 = infinitesimo positivo);

$\lim_{x\to1^-} \frac{1}{x^2-1} = \underline{\underline{-\infty}}$ (poiché, per $x\to1^-$, si ha x^2-1 = infinitesimo negativo);

$\lim_{x\to-3^-} \frac{1}{|x|-3} = \underline{\underline{+\infty}}$ (poiché, per $x\to-3^-$, si ha $|x|-3$ = infinitesimo positivo);

$\lim_{x\to-3^+} \frac{1}{|x|-3} = \underline{\underline{-\infty}}$ (poiché, per $x\to-3^+$, si ha $|x|-3$ = infinitesimo negativo);

$\lim_{x\to0^+} \frac{2e^x-1}{x^3} = \underline{\underline{+\infty}}$ $\left(\frac{\overbrace{2e^x-1}^{\to 1}}{\underbrace{x^3}_{\text{infinitesimo positivo}}} \text{ per } x\to0^+ \right)$;

$\lim_{x\to0^-} \frac{x^2+x}{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ $\left(\frac{x^2+x}{2x} = \frac{\cancel{x}(x+1)}{2\cancel{x}} = \frac{x+1}{2} \xrightarrow[x\to0^-]{} \frac{1}{2} \right)$. □

ii) $\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x^2-3x} = \underline{\underline{+\infty}}$ $\left(\frac{1}{x^2-3x} = \frac{1}{\underbrace{x}_{\text{infinitesimo negativo}}\underbrace{(x-3)}_{\to -3}} \xrightarrow{x\to0^-} +\infty \right)$;

$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2-3x} = \underline{\underline{-\infty}}$ $\left(\frac{1}{x^2-3x} = \frac{1}{\underbrace{x}_{\text{infinitesimo positivo}}\underbrace{(x-3)}_{\to -3}} \xrightarrow{x\to0^+} -\infty \right)$;

$\lim_{x\to0} \frac{1}{x^3}$ $\nexists$ $\left(\lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^3} = -\infty ,\ \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3} ; \text{ poiché } \lim_{x\to0^-}\frac{1}{x^3} \neq \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^3} \text{ si ha } \nexists \lim_{x\to0}\frac{1}{x^3} \right)$;

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \underline{\underline{+\infty}}$ $\qquad \left(\dfrac{1}{x^2} \right.$ per $x \to 0$ infinitesimo positivo $\left. \to +\infty \right)$;

iii) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x+3}{x-3} = \underline{\underline{+\infty}}$ $\qquad \left(\dfrac{\overset{\to 6}{x+3}}{x-3} \xrightarrow{x\to 3^+} +\infty \right)$; ($x-3$ infinitesimo positivo per $x \to 3^+$)

$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-3}{x+3} = \underline{\underline{0}}$;

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{e^x + 1}{\frac{1}{x^2} + 2} \right) = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\underbrace{\dfrac{1}{x-2}}_{\to +\infty} \right) \left(\underbrace{\dfrac{1}{x-3}}_{\to -1} \right) = \underline{\underline{-\infty}}$;

iv) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+x}{5+x^3} = \underline{\underline{0}}$ $\qquad \left(\dfrac{3x^2+x}{5+x^3} = \dfrac{x^2\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(\frac{5}{x^3}+1\right)} = \dfrac{1}{x} \, \dfrac{\left(3+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)}{\left(\underset{\to 0}{\frac{5}{x^3}}+1\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \right)$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+x}{5+x^2} = \underline{\underline{3}}$ $\qquad \left(\dfrac{3x^2+x}{5+x^2} = \dfrac{x^2\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(\frac{5}{x^2}+1\right)} = \dfrac{3+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}}{\underset{\to 0}{\frac{5}{x^2}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 3 \right)$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+x}{5+x} = \underline{\underline{+\infty}}$ $\qquad \left(\dfrac{3x^2+x}{5+x} = \dfrac{x^2\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{5}{x}+1\right)} = x \, \dfrac{\left(3+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)}{\left(\underset{\to 0}{\frac{5}{x}}+1\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \right)$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2+x}{5-x} = \underline{\underline{-\infty}}$ $\qquad \left(\dfrac{3x^2+x}{5-x} = \dfrac{x^2\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{5}{x}-1\right)} = x \, \dfrac{\left(3+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)}{\left(\underset{\to 0}{\frac{5}{x}}-1\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty \right)$.

4) i) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \underline{\underline{0}}$; $\qquad \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \underline{\underline{-\infty}}$; $\qquad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \underline{\underline{1}}$;

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \underline{\underline{0}}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$; $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \underline{\underline{-\infty}}$;

ii) $x=-1$ è asintoto verticale; $f(-1) = \frac{1}{2} > 0$

− − − − − − − − − − − − + + + − | + + + + + + + + − − − − − −

$-6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -\frac{5}{2} \quad -2 \quad -\frac{3}{2} \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad \frac{5}{2} \quad 3 \quad 4$

iii) su $]-\infty, -3]$ f è decrescente; su $[-3, -2]$ f è crescente;
su $[-2, -1[$ f è decrescente; su $[-1, 0]$ f è crescente;
su $[0, 2[$ f è decrescente; su $[2, +\infty[$ f è decrescente.

iv) f è discontinua in $x=-1$, f è discontinua in $x=2$;

v) $\min\limits_{[\frac{3}{2}, 3]} f = f(3) = \underline{\underline{-\dfrac{1}{2}}}$; $\quad \max\limits_{[\frac{3}{2}, 3]} f = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$; non è soddisfatta l'ipotesi di continuità di f su $[\frac{3}{2}, 3]$ essendo discontinua in $x=2$.