

COGNOME _____

NON SCRIVERE QUI

NOME _____

A

MATRICOLA | | | | | |

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 26 GENNAIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti**; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti. **Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) i) Rappresentate nel piano cartesiano xy i seguenti insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3 < y \leq -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 2\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 - 4y > -4\}.$$

- ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

- 2) Siano $f, g : [-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 2^x - 1 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ 3 \log_3(x + 3) & \text{se } 0 < x \leq 6; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x + 1} & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ -(x - 1)^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{x}{3} - \frac{1}{3} & \text{se } 1 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano le funzioni f e g .
ii) Determinate l'insieme $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $f : [-2, 6] \rightarrow B$ è biettiva. Rappresentate poi graficamente la funzione inversa $f^{-1} : B \rightarrow [-2, 6]$.
iii) Determinate, se esistono, $(f + g)(-2)$, $(fg)(0)$ e $(\frac{f}{g})(1)$.
iv) Calcolate $f(0)$ e $g(3)$. Calcolate, se possibile, $(g \circ f)(0)$.
v) Rappresentate graficamente la funzione $x \mapsto 2g(x) + 1$.

vi) Calcolate $\sum_{k=1}^4 |g(\frac{2}{k})|$.

3) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$3x^2 - |x^2 - 1| + 3x \geq 0; \quad \log_2 (2 - |x|) - \log_2 x^2 < 0.$$

ii) Calcolate $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2^x}{\log|x| + 3x^2}$; $\int_1^3 x(1 - x^{-2}) dx$.

4) Deducete dal grafico di $f :]-\infty, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ (vedi disegno)

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$;

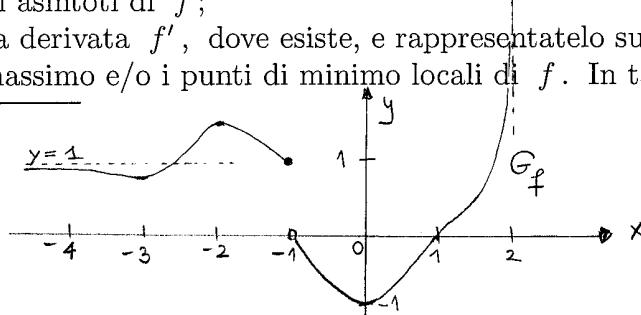
ii) gli eventuali punti di discontinuità della f ;

iii) gli eventuali intervalli di monotonia della f ;

iv) gli eventuali asintoti di f ;

v) il segno della derivata f' , dove esiste, e rappresentatelo sulla retta reale;

vi) i punti di massimo e/o i punti di minimo locali di f . In tali punti la f' si annulla?



5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate tutti i punti del grafico di f , nei quali la retta tangente al grafico di f ha pendenza uguale a 1. Disegnate poi tali rette.

iii) Provate che $f(x) = x - \frac{x}{x^2 + 1}$ per ogni x appartenente al dominio di f .

iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalle rette di equazione $y = x$ e $x = 2$.

6) (Esercizio relax!!) Se per il vostro piano di studi dovete scegliere 3 corsi facoltativi da una rosa di 7 corsi proposti, quante sono le possibili scelte che potete effettuare?

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1 2 3 4 5 6

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE
CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 26 GENNAIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti**; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti. **Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) i) Rappresentate nel piano cartesiano xy i seguenti insiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2 \leq y < -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 3\};$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 - 6y > -9\}.$$

- ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

- 2) Deducete dal grafico di $f :]-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ (vedi disegno)

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$;

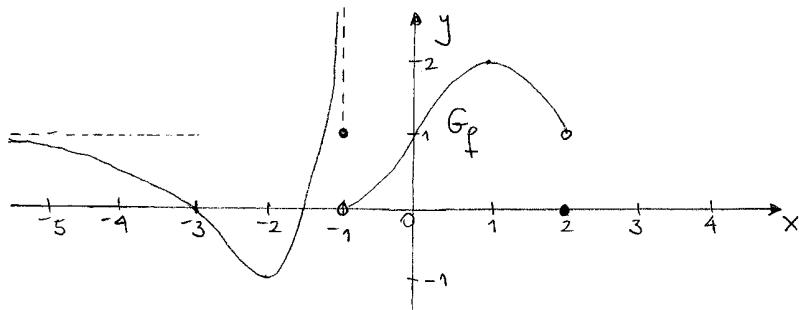
ii) gli eventuali punti di discontinuità della f ;

iii) gli eventuali intervalli di monotonia della f ;

iv) gli eventuali asintoti di f ;

v) il segno della derivata f' , dove esiste, e rappresentatelo sulla retta reale;

vi) i punti di massimo e/o i punti di minimo locali di f . In tali punti la f' si annulla?



- 3) Siano $f, g : [-2, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 2^x - 1 & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ 3 \log_3(x+3) & \text{se } 0 < x \leq 6; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x+1} & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ -(x-1)^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \frac{x}{3} - \frac{1}{3} & \text{se } 1 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

- Rappresentate graficamente nel piano cartesiano le funzioni f e g .
- Determinate l'insieme $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $f : [-2, 6] \rightarrow B$ è biiettiva. Rappresentate poi graficamente la funzione inversa $f^{-1} : B \rightarrow [-2, 6]$.
- Determinate, se esistono, $(f+g)(-1)$, $(fg)(6)$ e $(\frac{f}{g})(-1)$.
- Calcolate $f(0)$ e $g(3)$. Calcolate, se possibile, $(g \circ f)(0)$.
- Rappresentate graficamente la funzione $x \mapsto 2g(x) + 1$.
- Calcolate $\sum_{k=1}^4 |g(\frac{3}{k})|$.

- 4) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$3x^2 - |x^2 - 1| + 3x \leq 0; \quad \log_2(2 - |x|) - \log_2 x^2 \geq 0.$$

$$\text{ii) Calcolate } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2^x}{\log|x| + 4x^2}; \quad \int_2^3 x(1 - x^{-2}) dx.$$

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- Determinate tutti i punti del grafico di f , nei quali la retta tangente al grafico di f ha pendenza uguale a 1. Disegnate poi tali rette.
- Provate che $f(x) = x - \frac{x}{x^2 + 1}$ per ogni x appartenente al dominio di f .
- Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalle rette di equazione $y = x$ e $x = 2$.

- 6) (Esercizio relax!!) Se per il vostro piano di studi dovete scegliere 3 corsi facoltativi da una rosa di 8 corsi proposti, quante sono le possibili scelte che potete effettuare?