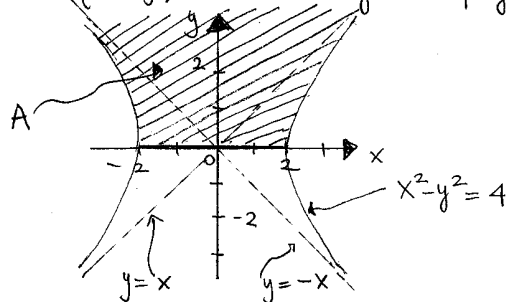


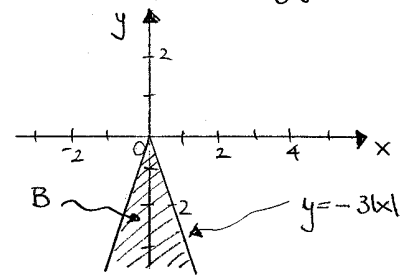
Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 Esame scritto di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2008-2009 - Rovereto, 1 luglio 2009

Compito (A)

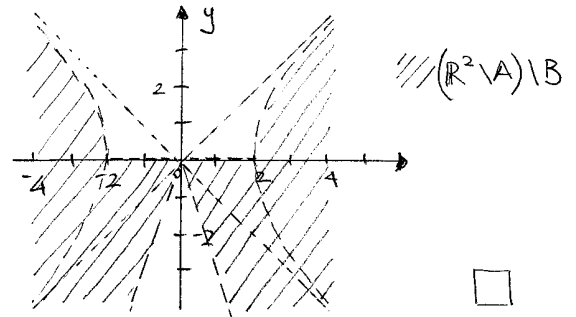
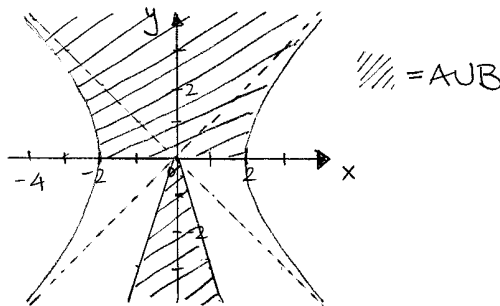
1) i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 4, y \geq 0\}$



$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{3}y \leq -|x|\}$



ii)



iii) a) $A \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\} \neq \emptyset$ (V) (per esempio $(0,1) \in$ all'intersezione);

b) $(0,1) \subset A$ (F) (è scorretta la scrittura; è corretta invece la scrittura $(0,1) \in A$);

c) $\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \subset B$ (V) (infatti tutti i pt. $(0,y)$ con $y < 0$ soddisfano $y \leq -3|x|$);

d) $(-3,1) \in A$ (F) (basta osservare che $(x,y) = (-3,1)$ soddisfa $x^2 - y^2 = 9 - 1 = 8 > 4$).

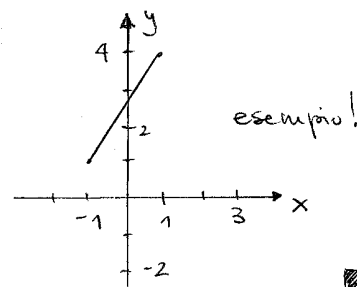
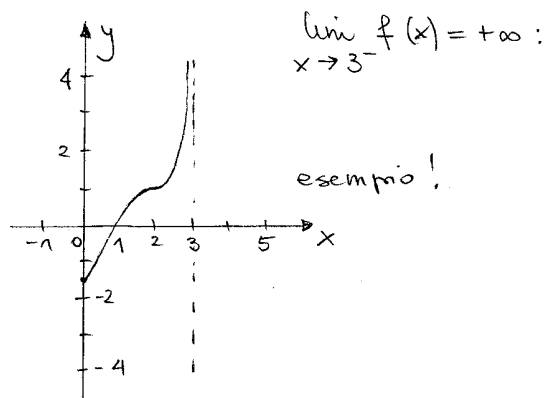
2) i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k + e^{3-x}}{\frac{4}{x^3} - 4x^4} = 0 \iff k \in \{1, 2, 3\}$

$\int_{1-\frac{1}{k}}^{1+\frac{1}{k}} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1-\frac{1}{k}}^{1+\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{k}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[\cancel{1} + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2} - \cancel{1} + \frac{2}{k} - \frac{1}{k^2} \right]$

$= \frac{2}{k}$

Allora $\int_{1-\frac{1}{k}}^{1+\frac{1}{k}} x dx = \frac{1}{4} \iff k = 8.$

ii) a) $f: [0, 3[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e crescente, tale che $f(2) > 0$, $f'(2) = 0$ e



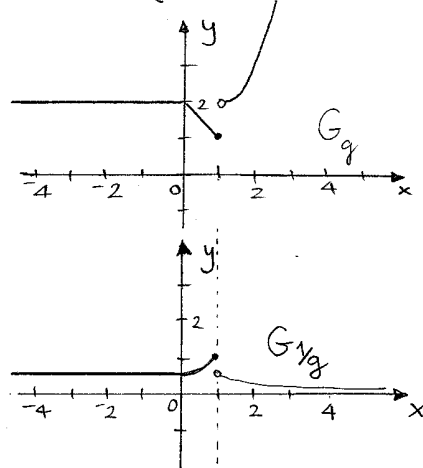
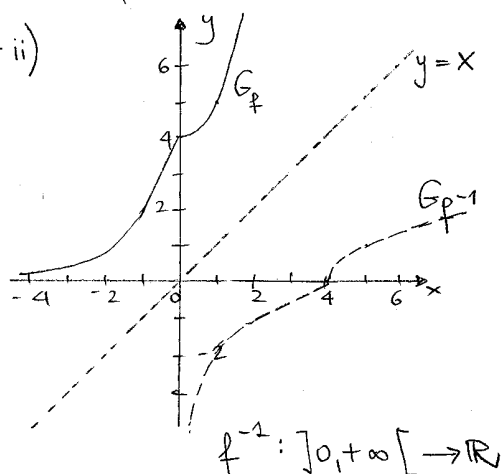
b) $g: [-1, 1] \rightarrow [1, 4]$ continua e biettiva

3) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{x+1} & \text{se } x \leq -1 \\ 2x+4 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ x^3+4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 0 \\ -x+2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ (x-1)^2+2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

i) + ii)



$$\frac{1}{g(x)}: \mathbb{R} \rightarrow]0, 1]$$

iii) $\min_{[-1, 1]} f = \cancel{1}$; $\max_{[-1, 1]} f = 5$ $x=1$ pt. di massimo;

$\min_{[-1, 1]} g = 1$ $x=1$ pt. di minimo; $\max_{[-1, 1]} g = 2$ $x \in [-1, 0]$ pt. di massimo.

iv) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2h+4) - 4}{h} = 2$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h^3+4) - 4}{h} = 0$$

$\cancel{f'(0)}$, poiché $\cancel{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}}$ poiché $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

v) $g(\mathbb{R}) = [1, +\infty[\neq]0, +\infty[$ e quindi g non è suriettiva; g non è nemmeno iniettiva: basta prendere, per esempio $x_1 = -1 < x_2 = 0$ e $g(x_1) = g(x_2) = 2$. ■

4) Consideriamo $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - 2x - \frac{1}{2}$ in $[0, 1]$. Allora f è una funzione continua e $f(0) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$, $f(1) = \frac{1}{4} - 2 - \frac{1}{2} < 0$. Per il teorema di esistenza degli zeri $\exists x_0 \in]0, 1[$ t.c. $f(x_0) = 0$, ossia $\exists x_0 \in]0, 1[$ t.c. $\frac{1}{(x_0+1)^2} = 2x_0 + \frac{1}{2}$.

Poiché $\frac{1}{(x+1)^2}$ è una funzione strett. decrescente in $[0, 1]$ e così lo è anche la funzione $-2x - \frac{1}{2}$, la funzione f è strett. decrescente in $[0, 1]$ e quindi x_0 è unico!

Consideriamo ora il pt. medio $a_0 = \frac{1}{2}$ di $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$; poiché $f(a_0) = \frac{4}{9} - 1 - \frac{1}{2} < 0$, x_0 sicuramente cadrà nell'intervallo $]0, \frac{1}{2}[$.

Consideriamo dunque il pt. medio $a_1 = \frac{1}{4}$ di $x_1 = 0$ e $a_0 = \frac{1}{2}$; poiché $f(a_1) = \frac{16}{25} - 1 < 0$, x_0 sicuramente cadrà nell'intervallo $]0, \frac{1}{4}[$.

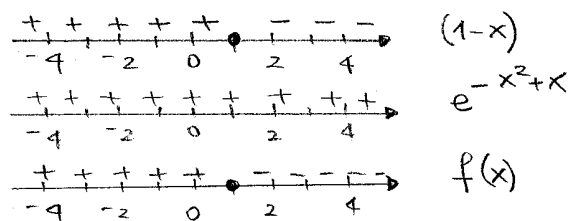
Infine, prendiamo il pt. medio $a_2 = \frac{1}{8}$ di $x_1 = 0$ e a_1 ; poiché $f(a_2) = \frac{64}{81} - \frac{3}{4} > 0$, x_0 sicuramente cadrà nell'intervallo $]\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$.

Basta ora prendere $]a, b[=]\frac{1}{8}, \frac{1}{4}[$ e si ha quanto richiesto ■

5) $f(x) = (1-x)e^{-x^2+x}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• segno di f



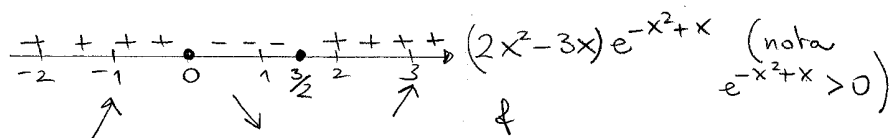
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $y=0$ è asintoto orizzontale per f per $x \rightarrow -\infty$ (per $x \rightarrow +\infty$).

• f è continua per composizione e prodotto di funzioni continue.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ e $f'(x) = -e^{-x^2+x} + (1-x)(-2x+1)e^{-x^2+x}$

$$= (2x^2 - 3x)e^{-x^2+x}$$

$$x=0, x=\frac{3}{2} \text{ pt. critici} \quad = x(2x-3)e^{-x^2+x}$$



$x=0$ pt. di max. loc. per f $f(0) = 1$

$x=\frac{3}{2}$ pt. di min. loc. per f $f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{2}e^{-3/4} (\sim -0,2)$

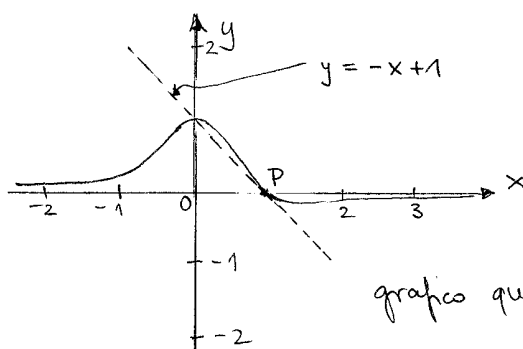


grafico qualitativo di f



ii) Punto di intersezione del grafico di f con l'asse x è $P = (1,0)$

L'eq. della retta tg r al grafico di f in P è

$$y = 0 + f'(1)(x-1), \text{ ossia } y = -x + 1$$

iii) Proviamo che $(1-x)e^{-x^2+x} \geq 1-x$ su $[0,1]$. Abbiamo l'uguaglianza

se $x=0$ e se $x=1$. se $x \in]0,1[$ allora $1-x > 0$

e quindi $(1-x)e^{-x^2+x} \geq 1-x \iff e^{-x^2+x} \geq 1$.

Poiché $e^{-x^2+x} \geq 1 \iff -x^2+x \geq 0 \iff x \in [0,1]$,

ri ha quanto si vede.

iv) Vedi sopra.

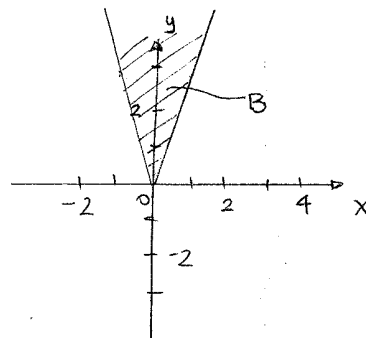
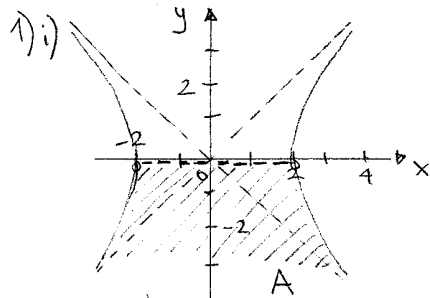


6) Siano $A(x,y) = \text{"La prova scritta } x \text{ di Analisi Matematica contiene l'esercizio } y \text{ di Calcolo Combinatorio"}$ e $B(x,z) = \text{"La prova scritta } x \text{ di Analisi Matematica contiene l'esercizio } z \text{ sulle diseq. logaritmiche"}$. Allora

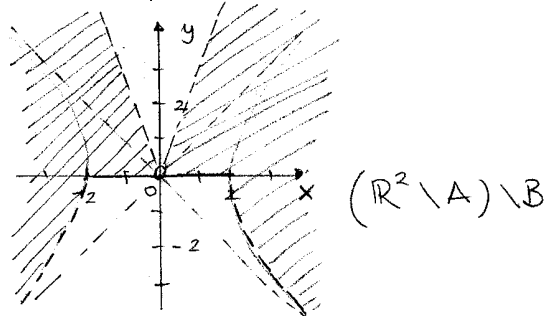
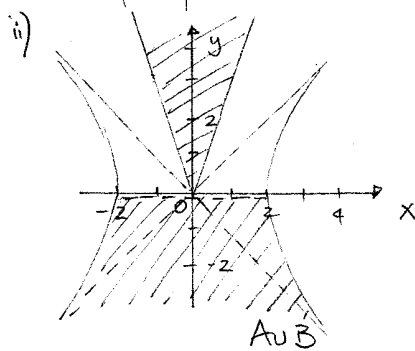
non $\left[\forall x, \exists y, z : A(x,y) \circ B(x,z) \right] \iff \exists x : \forall y, z, (\text{non } A(x,y)) \vee (\text{non } B(x,z))$.



Compito B



□



□

iii) a) (F)

b) (F)

scritta

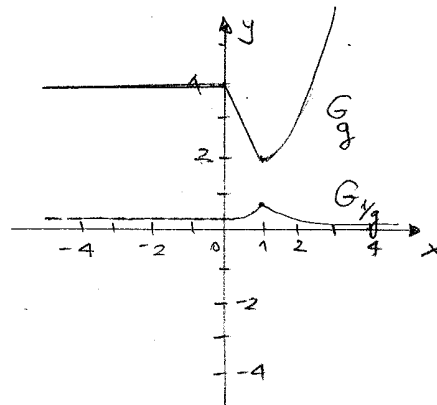
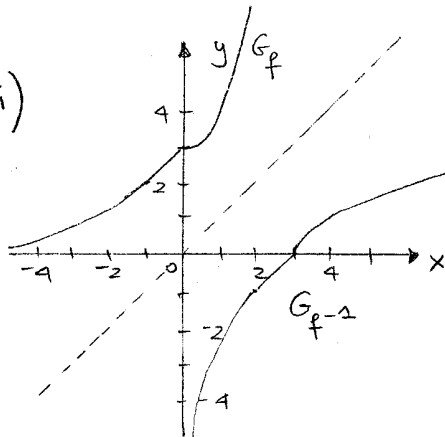
c) (F)

d) (F)

∉ A

■

2) i) ii)



□

iii) $\min_{[-1,1]} f$ ☒

$$\max_{[-1,1]} f = f(1) = 4 \quad x=1 \text{ pt. di max}$$

$$\min_{[-1,1]} g = g(1) = 2 \quad x=1 \text{ pt. di min}$$

$$\max_{[-1,1]} g = 4 \quad x \in [-1,0] \text{ pt. di max}$$

□

iv) $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(h+3) - 3}{h} = 1$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h^4+3) - 3}{h} = 0$$

☒ $f'(0)$ poiché $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$.

v) $g(\mathbb{R}) = [2, +\infty[$; g non è iniettiva poiché $g(-1) = 4 = g(0)$
e $-1 \neq 0$;

g non è suriettiva, poiché $g(\mathbb{R}) \subsetneq]0, +\infty[$. ■

3) vedi Fila (A), Es. 4.

4) i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + e^{3-x}}{x^3 - 4x^k} = 0 \iff \underline{k \in \{6, 7, 8, \dots\}}$

$$\int_{1-\frac{1}{k}}^{1+\frac{1}{k}} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{1-\frac{1}{k}}^{1+\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{k}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{k^2} = \frac{2}{k^2} \quad \frac{2}{k^2} = \frac{1}{8} \iff \underline{k=4}$$

ii) vedi Fila (A), Es. 2 ii) ■

5) vedi Fila (A) Es. 5 Se $\hat{f}(x) = (1-x)e^{-x^2+x}$ come in fila (A)

allora $f(x) = (x-1)e^{-x^2+x} = -\hat{f}(x)$ e quindi si ottiene G_f
 $= \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, -\hat{f}(x)) : x \in \mathbb{R}\}$.

ii) r

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2+x} + (x-1)(-2x+1)e^{-x^2+x} \\ &= e^{-x^2+x} \left[\cancel{1} - 2x^2 + x + 2x - \cancel{1} \right] \\ &= e^{-x^2+x} \left[-2x^2 + 3x \right] \\ &= x(-2x+3) e^{-x^2+x} \end{aligned}$$

$P = (1, 0)$

$r \iff y = f(1) + f'(1)(x-1)$
 $= 0 + (x-1)$

$y = x - 1$

iii) $f(x) \leq (x-1) \iff (x-1)e^{-x^2+x} \leq (x-1) \quad (\text{vero se } x=1)$

$\iff e^{-x^2+x} \geq 1$ NOTA: $x-1 < 0$
se $x \in [0, 1[$

$\iff -x^2+x \geq 0 \iff x \in [0, 1]$. ■

6) non $[\forall x, \exists y, \exists z : A(x, y) \text{ e } B(x, z)] \iff [\exists x : \forall y, \forall z : \text{non } A(x, y) \text{ o } \text{non } B(x, z)]$

con $A(x, y)$ = "La prova scritta x di AM contiene l'esercizio di CC y "
 $B(x, z)$ = "la prova scritta x di AM contiene l'esercizio sulle dis. log. z ". ■