

COGNOME \_\_\_\_\_

NOME \_\_\_\_\_

MATRICOLA 

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

NON SCRIVERE QUI

A

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
|   |   |   |   |   |   |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA CON ELEMENTI DI ALGEBRA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 9 FEBBRAIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti**; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti. **Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) Sia  $C$  il centro dell'ellisse  $E$  di equazione  $x^2 + 2x + 4(y^2 - 4y + 4) = 3$  e  $V$  il vertice della parabola di equazione  $y - x^2 + 2x + 2 = 0$ .
- i) Determinate l'equazione della retta  $r$  passante per  $C$  e  $V$ .
  - ii) Determinate l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $C$ .
  - iii) Rappresentate graficamente, nello stesso sistema di riferimento, l'ellisse, la parabola e le rette  $r$  ed  $r'$ .
  - iv) Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte):
    - a)  $\forall (x, y) \in E, y \geq 1$ ;      b)  $\forall (x, y) \in E, x < 0$ ;
    - c)  $\exists (x, y) \in E : x = 1$ ;      d)  $(-1, 1) \in E$ .

- 2) Sia  $f : [-3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } -3 \leq x < -2 \\ |x^2 - 1| & \text{se } -2 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x - 1} & \text{se } 1 < x \leq 5. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano la funzione  $f$ . Rappresentate sulla retta reale il segno di  $f'$ .
- ii) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (e gli eventuali punti di minimo e/o di massimo) di  $f$  su  $[-1, 2]$ .
- iii) Rappresentate, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni  $x \mapsto -f(x) + 1$ , e  $x \mapsto f(x + 1)$ .
- iv) Calcolate  $\int_1^5 f(x) dx$ .

3) i) Risolvete in  $\mathbb{R}$  le seguenti disequazioni:

$$2^{|x-1|} \cdot 2^x < 4; \quad \log_2(3 - x^2) \leq 1; \quad \frac{1}{||x-1|-2|} > 0.$$

ii) Sia  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ . Calcolate  $\sum_{n=1}^8 \int_n^{n+1} f(x) dx$ .

---

---

4) Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false? (motivate le risposte!!)

i)  $f(x) \leq f(0)$  per ogni  $x \in [0, 1]$ ;

ii)  $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx < 1$ ;

iii) esiste il massimo e il minimo di  $f$  su  $[0, 1]$ ;

iv)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -1$ .

---

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = 5x^4 - 4x^5$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico della  $f$  nel punto  $(1, 1)$ .

iii) Determinate, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il numero delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = k$ .

iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di  $f$ , dalla retta di equazione  $y = x - 1$  e dalle rette di equazione  $x = 0$  e  $x = 1$ .

---

---

6) Determinate  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $C_{n,2} = 10$ .

---

COGNOME \_\_\_\_\_

NOME \_\_\_\_\_

MATRICOLA 

|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|

NON SCRIVERE QUI

B

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA CON ELEMENTI DI ALGEBRA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 9 FEBBRAIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti**; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti. **Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) Sia  $C$  il centro dell'ellisse  $E$  di equazione  $x^2 - 2x + 4(y^2 + 4y + 4) = 3$  e  $V$  il vertice della parabola di equazione  $y + x^2 + 2x - 2 = 0$ .
- i) Determinate l'equazione della retta  $r$  passante per  $C$  e  $V$ .
- ii) Determinate l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $C$ .
- iii) Rappresentate graficamente, nello stesso sistema di riferimento, l'ellisse, la parabola e le rette  $r$  ed  $r'$ .
- iv) Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte):
- a)  $\forall (x, y) \in E, y \leq -1$ ;      b)  $\forall (x, y) \in E, x > 0$ ;
- c)  $\exists (x, y) \in E : y = -2$ ;      d)  $(1, -2) \in E$ .

- 2) i) Risolvete in  $\mathbb{R}$  le seguenti disequazioni:

$$2^{|x-1|} \cdot 2^x \geq 8; \quad \log_3(4 - x^2) < 1; \quad \frac{1}{||x-1|-3|} > 0.$$

ii) Sia  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ . Calcolate  $\sum_{n=1}^8 \int_n^{n+1} f(x) dx$ .

3) Sia  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ . Quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false? (motivate le risposte!!)

i)  $f(x) \leq f(0)$  per ogni  $x \in [0, 1]$ ;

ii)  $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx < 1$ ;

iii) esiste il massimo e il minimo di  $f$  su  $[0, 1]$ ;

iv)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -1$ .

---

4) Sia  $f : [-3, 5] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ |x^2 - 1| & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ -\sqrt{x-1} & \text{se } 1 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano la funzione  $f$ . Rappresentate sulla retta reale il segno di  $f'$ .

ii) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (e gli eventuali punti di minimo e/o di massimo) di  $f$  su  $[-3, 1]$ .

iii) Rappresentate, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni  $x \mapsto -f(x) + 1$ , e  $x \mapsto f(x-1)$ .

iv) Calcolate  $\int_2^5 f(x) dx$ .

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = -5x^4 + 4x^5$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico della  $f$  nel punto  $(1, -1)$ .

iii) Determinate, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il numero delle soluzioni dell'equazione  $f(x) = k$ .

iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di  $f$ , dalla retta di equazione  $y = -x + 1$  e dalle rette di equazione  $x = 0$  e  $x = 1$ .

---

6) Determinate  $n \in \mathbb{N}$  tale che  $D_{n,2} = 12$ .

---