

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

A

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA CON ELEMENTI DI ALGEBRA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 12 GENNAIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti**; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti. **Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematica la seguente proposizione: "In ogni sessione d'esami lo studente Mario Rossi supera almeno un esame con un voto superiore a 27/30". Scrivete in italiano corrente la negazione di questa proposizione.

- ii) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 8}{x} \geq -x\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - 1)|x + 2| \leq 0\},$$

e rappresentateli sulla retta reale.

- iii) Determinate gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$ e dite se sono degli intervalli di \mathbb{R} .

- iv) Rappresentate graficamente l'insieme $A \times B$.

- 2) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$2^{-3x^2} \cdot 4^{-x} - 2 \geq 0; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{|x^2-2|} \cdot 3^{-x} < 1;$$

$$3x^2 - |x - 1| - x \leq 0; \quad \log(x + 1) + \log(2x - 1) \geq 1.$$

- ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme dei punti (x, y) soddisfacenti i seguenti sistemi di disequazioni:

$$\text{a) } \begin{cases} y \leq |x + 2| \\ x^2 - 4x + 4y^2 \leq 0; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y \leq 2 \\ (x + 1)^2 - y^2 > 4. \end{cases}$$

3) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{se } x < -1 \\ 2 & \text{se } x = -1 \\ |\log_2(x+2) - 1| & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente f nel piano cartesiano.
 - ii) Dite se f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass sull'intervallo $[-1, 2]$. Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo di f su $[-1, 2]$. Indicate anche gli eventuali punti di minimo e/o di massimo.
 - iii) Determinate $f(\mathbb{R})$; dite se f è suriettiva (motivando la risposta).
 - iv) Rappresentate graficamente la funzione $x \mapsto |f(x) - 2|$.
-

4) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = (x-1)^3 e^x$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Scrivete le equazioni di tutte le rette tangenti al grafico di f che sono rette orizzontali. Rappresentatele graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .
 - iii) Provate che $F(x) = e^x[(x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 6(x-1) - 6]$ è una primitiva di f .
 - iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta tangente al grafico di f in $(1, 0)$ e dalla retta $x = 2$.
-

5) Sia $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte; trovando eventualmente un controesempio):

a) se $f(0) \cdot f(2) < 0$, allora $f(x_0) = 0$ per qualche $x_0 \in [-1, 3]$;

b) se $\max_{[-1, 3]} f = f(2)$, allora $f'(2) = 0$;

c) se $f(1) = 0$, allora la funzione integrale $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ ha un punto critico in $x = 1$.

6) (Esercizio relax!!) Sulla barra in fondo allo schermo del computer ci sono 21 icone distinte. Una di esse è il cestino ed è vincolato a stare sempre in ultima posizione. Quanti sono i modi diversi in cui le icone possono essere disposte sulla barra?
