Università degli Studi di Trento – Facoltà di Scienze Cognitive
CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
Verifica settimanale di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
a.a. 2008 – 2009 – Rovereto, 1 – 5/12/08

1) i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3-e^x}{|x|} = \underline{\underline{0}}$ $\left(\text{poiché } \frac{3-e^x}{|x|} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0\right)$; $e^x \to 0$, $|x| \to +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x-x}{2+e^x} = \underline{\underline{0}}$ $\left(\text{poiché } \frac{2^x-x}{2+e^x} = \frac{2^x\left(1-\frac{x}{2^x}\right)}{e^x\left(\frac{2}{e^x}+1\right)} = \left(\frac{2}{e}\right)^x \frac{\left(1-\frac{x}{2^x}\right)}{\left(\frac{2}{e^x}+1\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\right)$; $\frac{x}{2^x}\to 0$, $\frac{2}{e^x}\to 0$, $\left(\frac{2}{e}\right)^x \to 0$ poiché $\frac{2}{e}<1$

$\lim_{x\to0} \frac{x^2}{e^x-1} = \underline{\underline{0}}$ $\left(\text{poiché } \frac{x^2}{e^x-1} = x\cdot\frac{x}{e^x-1} \xrightarrow[x\to0]{} 0\right)$; $x \to 0$, $\frac{x}{e^x-1}\to 1$

$\lim_{x\to1} \frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \underline{\underline{1}}$ $\left(\text{poiché } \lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1} = \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = 1\right)$;

ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3^x}{\log x+3^{x+1}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$ $\left(\text{poiché } \frac{x^2+3^x}{\log x+3^{x+1}} = \frac{\cancel{3^x}\left(\frac{x^2}{3^x}+1\right)}{\cancel{3^x}\left(\frac{\log x}{3^x}+3\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{3}\right)$; $\frac{x^2}{3^x}\to 0$, $\frac{\log x}{3^x}\to 0$

$\lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{1}}$ $\left(\text{poiché } \lim_{x\to+\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \right.$

$\left. = \lim_{x\to0^+}\frac{\log(1+x)}{x} = 1\right)$;

$\lim_{x\to-2^+} \frac{x^2}{2+x} = \underline{\underline{+\infty}}$ $\left(\text{poiché } \frac{x^2}{2+x} \xrightarrow{x\to-2^+} +\infty\right)$; $x^2 \to 4$, $2+x$ infinitesimo positivo per $x\to-2^+$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^4)}{x^5} = \underline{\underline{0}}$ $\left(\text{poiché } \frac{\log(1+x^4)}{x^5} \underset{x>0}{=} \frac{\log x^4+\log\left(\frac{1}{x^4}+1\right)}{x^5} \underset{x>0}{=}\right.$

$\left. = \frac{4\log x}{x^5} + \frac{\log\left(\frac{1}{x^4}+1\right)}{x^5} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\right)$;

iii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{2^{-x}} = \underline{\underline{+\infty}}$ $\left(\text{poiché } 2^x\log(1+x^2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty\right)$;

$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\log(1+x^2)} = \underline{\underline{0}}$ $\left(\text{poiché } \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\log(1+x^2)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0\right)$; $\frac{1}{x}\to 0$, $e^{\frac{1}{x}} \to 1$, $\log(1+x^2) \to +\infty$

$\lim_{x\to0} \frac{\log(1+3x)}{3x^3} = \underline{\underline{+\infty}}$ $\left(\text{poiché } \frac{\log(1+3x)}{3x}\cdot\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to0]{} +\infty\right)$; $\frac{\log(1+3x)}{3x} \to 1$, $\frac{1}{x^2} \to +\infty$

$\lim_{x\to0^+} \frac{\log(1+3x)}{e^{\log(2x)}} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$ $\left(\text{poiché } \frac{\log(1+3x)}{e^{\log(2x)}} = \frac{\log(1+3x)}{2x} = \frac{\log(1+3x)}{3x}\cdot\frac{3}{2} \xrightarrow{x\to0} \frac{3}{2}\right)$. $\frac{\log(1+3x)}{3x} \xrightarrow{x\to0} 1$

2) $f: \mathbb{R}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}\setminus\{0,1\} =]-\infty,0[\, \cup\,]0,1[\, \cup\,]1,+\infty[$

$f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2-x}$;

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \underline{\underline{2}}$ $\Rightarrow$ $y=2$ è asintoto orizzont. per f (per $x\to-\infty$)

$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\overbrace{2x^2-1}^{\to -1}}{x\underbrace{(x-1)}_{\to -1}} = \underline{\underline{-\infty}}$ $\Rightarrow$ $x=0$ è asintoto verticale per f (per $x\to 0^-$)

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{2x^2-1}{x(x-1)} = \underline{\underline{+\infty}}$ $\Rightarrow$ $x=0$ è asintoto verticale per f (per $x\to 0^+$)

$\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\overbrace{2x^2-1}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{1}(x-1)} = \underline{\underline{-\infty}}$ $\Rightarrow$ $x=1$ è asintoto verticale per f (per $x\to 1^-$)

$\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\overbrace{2x^2-1}^{\to 1}}{\underbrace{x}_{1}(x-1)} = \underline{\underline{+\infty}}$ $\Rightarrow$ $x=1$ è asintoto verticale per f (per $x\to 1^+$)

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-1}{x^2-x} = \underline{\underline{2}}$ $\Rightarrow$ $y=2$ è asintoto orizzont. per f (per $x\to+\infty$). $\square$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} -\log|x| + 1 & \text{se } x<0 \\ e^{-x}+x & \text{se } x\geq 0 \end{cases};$$

$\lim_{x\to-\infty} (-\log|x|+1) = \underline{\underline{-\infty}}$

$\lim_{x\to 0^-} (-\log|x|+1) = \underline{\underline{+\infty}}$

$\Rightarrow$ $x=0$ è asintoto verticale per f (per $x\to 0^-$)

$\lim_{x\to+\infty} (e^{-x}+x) = +\infty$; osserviamo che

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1 = a$ e $b=0$

Si ha che $y=x$ è asintoto obliquo per f per $x\to+\infty$. $\square$

$h: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{R}\setminus\{0\} =]-\infty,0[\, \cup\,]0,+\infty[$

$h(x) = \dfrac{-x+1}{x^3}$;

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \underline{\underline{0}}$ $\Rightarrow$ $y=0$ è asintoto orizzont. per f (per $x\to-\infty$)

$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \underline{\underline{-\infty}}$ $\Rightarrow$ $x=0$ è asintoto verticale per f (per $x\to 0^-$)

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \underline{\underline{+\infty}}$ $\Rightarrow$ $x=0$ è asintoto verticale per f (per $x\to 0^+$)

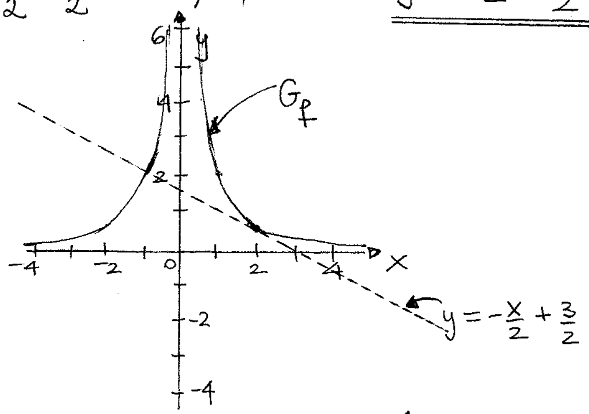
$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \underline{\underline{0}}$ $\Rightarrow$ $y=0$ è asintoto orizzont. per f (per $x\to+\infty$). $\blacksquare$

3) i) a) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ $\qquad f'(x) = (2x^{-2})' = -4x^{-3} = -\frac{4}{x^3}$

$$f'(2) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}.$$

Allora, l'eq. della retta tg. al grafico di f nel pt. $(2, \frac{1}{2})$ è

$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-2)$, ossia $\underline{\underline{y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}}}$.

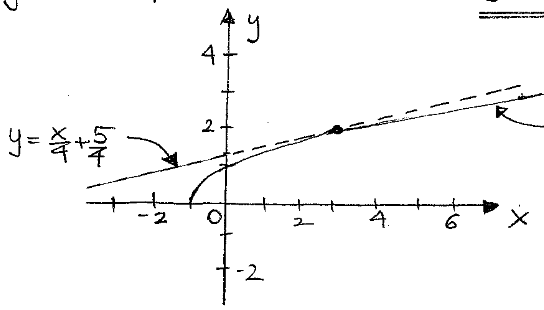


b) $g(x) = \sqrt{x+1}$ $\qquad g'(x) = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$$g'(3) = \frac{1}{4}.$$

Allora, l'eq. della retta tg. al grafico di g nel pt. $(3,2)$ è

$y = 2 + \frac{1}{4}(x-3)$, ossia $\underline{\underline{y = \frac{x}{4} + \frac{5}{4}}}$.

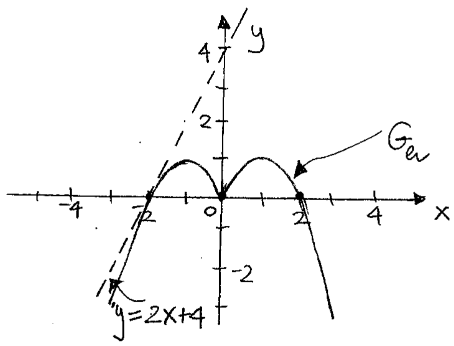


c) $h(x) = -x^2 + 2|x| = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & \text{se } x > 0. \end{cases}$ $\qquad h'(x) = -2x - 2$ se $x < 0$

$$h'(-2) = 2.$$

Allora, l'eq. della retta tg. al grafico di h nel pt. $(-2, 0)$ è

$y = 0 + 2(x+2)$, ossia $\underline{y = 2x + 4}$.



ii) a) $f(x)=\sqrt[3]{3x+1}$: allora $f'(x)=\frac{1}{\cancel{3}}(3x+1)^{-\frac{2}{3}}\cdot\cancel{3}$

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}$;

la pendenza della retta tg. al grafico di f nel pt. $(0,1)$ è $\underline{\underline{f'(0)=1}}$;

$\square$

b) $g(x)=x\log(x^2+e)$: allora $g'(x)=\log(x^2+e)+x\cdot\frac{1}{x^2+e}\cdot 2x$

$g'(x)=\log(x^2+e)+\frac{2x^2}{x^2+e}$;

la pendenza della retta tg. al grafico di g nel pt. $(0,0)$ è $\underline{\underline{g'(0)=1}}$;

c) $h(x)=\log\left(e^{x^2+x}\right)$: abbiamo $h(x)=x^2+x$ e quindi $h'(x)=2x+1$;

la pendenza della retta tg. al grafico di h nel pt. $(1,2)$ è $\underline{\underline{h'(1)=3}}$.

$\blacksquare$

4) a) $(7x^2+x^{-3})'=14x-3x^{-4}=\underline{\underline{14x-\frac{3}{x^4}}}$;

$\left(\frac{1}{x^3}-2x^4\right)'=\underline{\underline{\frac{-3}{x^4}-8x^3}}$;

$\left(\frac{x^{-2}}{x+3}\right)'=\underline{\underline{\frac{-2x^{-3}\cdot(x+3)-x^{-2}}{(x+3)^2}}}$;

$\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}=\underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2}}}$;

$\square$

b) $\left[(e^x+x^{-1})(\log_3 x+\sqrt[3]{x})\right]'=\underline{\underline{\left(e^x-\frac{1}{x^2}\right)(\log_3 x+\sqrt[3]{x})+}}$

$\underline{\underline{+\left(e^x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x\log 3}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)}}$;

$\left[(x^{-2}+2x)(2^x+x^2)\right]'=\underline{\underline{\left(\frac{-2}{x^3}+2\right)(2^x+x^2)+(x^{-2}+2x)(2^x\log 2+2x)}}$;

$\left[(3^x+2x)(\log_2 x)\right]'=\underline{\underline{(3^x\log 3+2)\log_2 x+(3^x+2x)\cdot\frac{1}{x\log 2}}}$;

$\square$

c) $\left(\frac{\log x+xe^x}{x^3+\log_3 9}\right)'=\left(\frac{\log x+xe^x}{x^3+2}\right)'=\underline{\underline{\frac{\left(\frac{1}{x}+e^x+xe^x\right)(x^3+2)-(\log x+xe^x)3x^2}{(x^3+2)^2}}}$;

$(x^4+4^x)'=\underline{4x^3+4^x\log 4}$;

$(3e^3+x^{-1}2^x)'=\underline{\underline{-\frac{1}{x^2}2^x+\frac{1}{x}2^x\log 2}}$.

$\square$

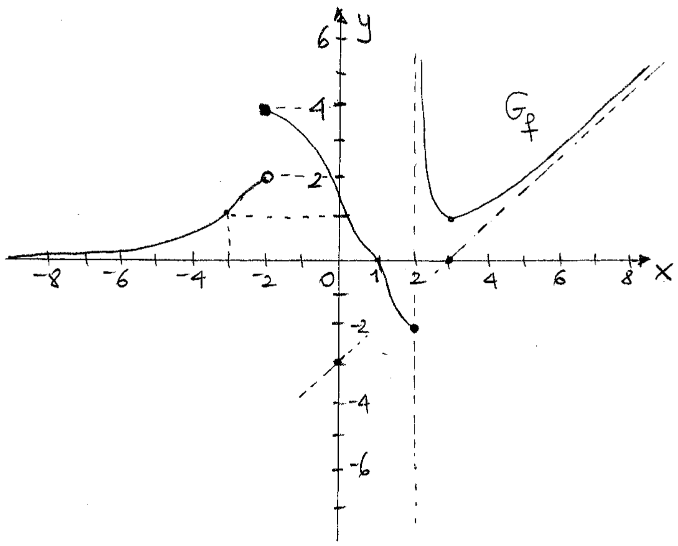
ii) $\left[(3x+4x^2)^4\right]' = \underline{\underline{4(3x+4x^2)^3(3+8x)}}$;

$\left(e^{x^2-2}\right)' = \underline{\underline{e^{x^2-2}\cdot 2x}}$;

$\left[\left((3x)^2 - x^{-2}\right)^{-1}\right]' = \underline{\underline{-\left(9x^2-x^{-2}\right)^{-2}\left(18x+2x^{-3}\right)}}$;

$\left[x^3 \log(1+2x)\right]' = \underline{\underline{3x^2\log(1+2x) + x^3\cdot\frac{2}{1+2x}}}$.

5)



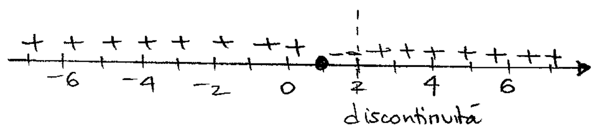
i) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \underline{\underline{0}}$; $\lim_{x\to-2^-} f(x) = \underline{\underline{2}}$; $\lim_{x\to-2^+} f(x) = \underline{\underline{4}}$;

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \underline{\underline{-2}}$; $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \underline{\underline{+\infty}}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \underline{\underline{+\infty}}$.

ii) $x=-2$ pt. di discontinuità $\left(\lim_{x\to-2^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to-2^+} f(x) = 4 = f(-2)\right)$

$x=2$ pt. di discontinuità $\left(\lim_{x\to2^-} f(x) = -2 = f(2) \neq \lim_{x\to2^+} f(x) = +\infty\right)$.

iii)



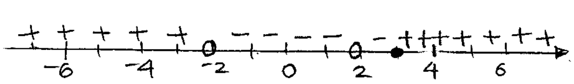
segno di f

iv) $y=0$ asintoto orizzontale per f, per $x\to-\infty$;

$x=2$ asintoto verticale per f, per $x\to 2^+$;

$y = x-3$ è asintoto obliquo per f, per $x\to+\infty$.

v)



segno di f' ($f' \nexists$ in $x=-2$, $x=2$)

vi) $f(-3)=1$ min. loc ; $f(1)=0$ min. loc (e globale); $f(-2)=4$ mass. loc (e globale)