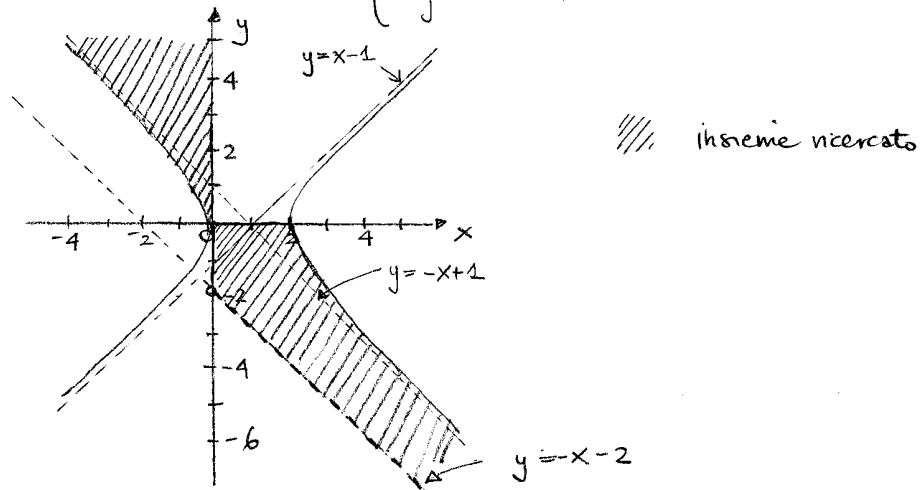


Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 Verifica settimanale di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2008-2009 - Trento, 20-24/10/08

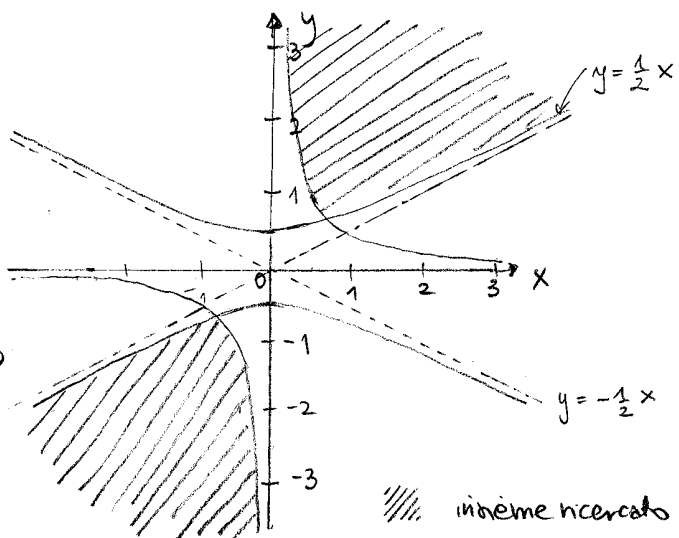
$$1) i) \begin{cases} xy \leq 0 \\ x^2 - 2x - y^2 \leq 0 \\ y > -x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x \leq 0 \text{ e } y \geq 0) \text{ o } (x \geq 0 \text{ e } y \leq 0) \\ (x-1)^2 - y^2 \leq 1 \\ y > -x - 2 \end{cases}$$



□

$$ii) \begin{cases} xy \geq \frac{1}{2} \\ x^2 - 4y^2 \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq \frac{1}{2x} & \text{se } x > 0 \\ y \leq \frac{1}{2x} & \text{se } x < 0 \\ -x^2 + \frac{y^2}{4} \geq 1 \end{cases}$$

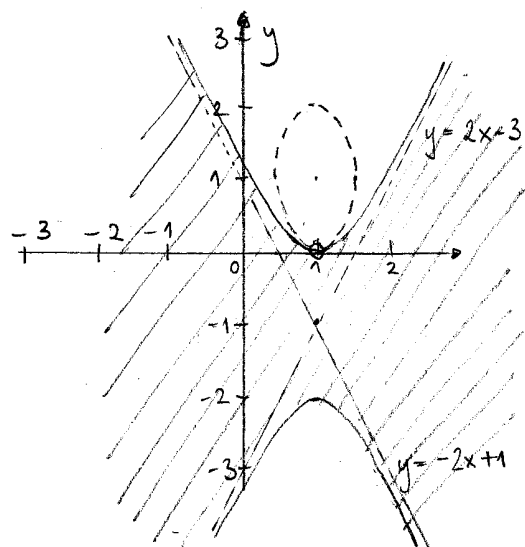


/// insieme cercato

□

$$iii) \begin{cases} -4x^2 + 8x + y^2 + 2y \leq 4 \\ 4x^2 - 8x + y^2 - 2y + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4(x^2 - 2x) + (y+1)^2 - 1 \leq 4 \\ 4(x^2 - 2x) + (y-1)^2 - 1 + 4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4(x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \leq 4 \\ 4(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + (y+1)^2 \leq 1 \\ \frac{(x-1)^2}{\frac{1}{4}} + (y-1)^2 > 1 \end{cases}$$



insieme ricorato

$$2) i) A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-3x}{x^2+1} \leq -1\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2x^2-3x+1}{x^2+1} \leq 0\}$$



$$2x^2-3x+1=0 \quad \Delta=9$$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm 1}{4} = \frac{1}{2} \text{ and } 1$$

$$= [\frac{1}{2}, 1]$$

NOTA: $x^2+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

A è limitata inferiormente e limitata superiormente

($\forall x \in A, \frac{1}{2} \leq x$ e $\forall x \in A, x \leq 1$). Inoltre

$$\min A = \frac{1}{2}; \quad \max A = 1$$



$$ii) B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2+2} < 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2+2 > 1\} =$$

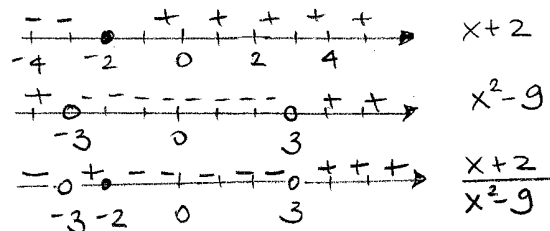
$$= \{x \in \mathbb{R} : x^2 > -1\} = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$$

B non è limitata inferiormente e non è limitata superiormente;

non ha minimo e non ha massimo.



$$iii) C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x+2}{x^2-9} > 0\} =]-3, -2[\cup]3, +\infty[.$$

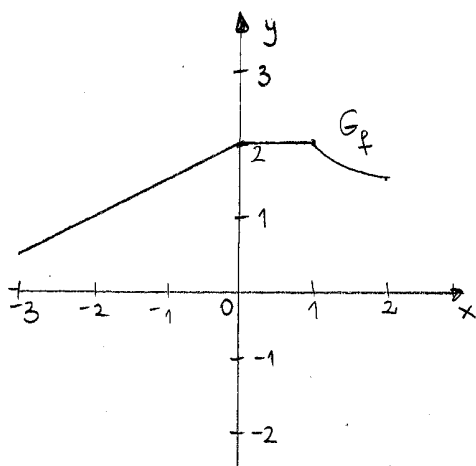


C è limitato inferiormente (infatti, $\forall x \in C$ si ha $-3 \leq x$)
ma non è limitato superiormente!

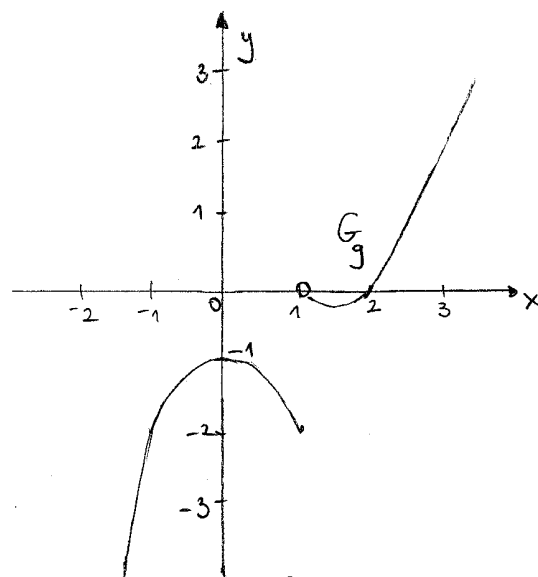
$\nexists \min C$ e $\nexists \max C$. □

iv) $D = [-2, 0[\cup]1, 5[$: D è limitato inferiormente e limit. sup.
($\forall x \in D, -2 \leq x$ e $\forall x \in D, x \leq 5$). Si ha
 $\min D = -2$ $\nexists \max D$. ■

3) i)



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{se } -3 \leq x \leq 0 \\ 2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + 1 & \text{se } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$



$$g(x) = \begin{cases} -x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^2 - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

ii) $f(-1) = \frac{1}{2}(-1) + 2 = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$ $f(0) = \underline{\underline{2}}$

$g(0) = -1 \neq f(-1)$. □

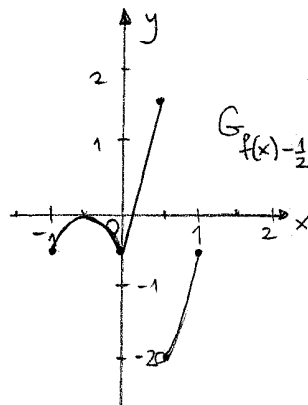
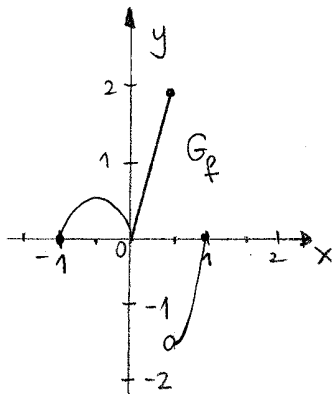
iii) $f([-1, 1]) = [\frac{3}{2}, 2]$ $g(\mathbb{R}) =]-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{4}, +\infty[$. □

iv) f non è iniettiva: basta prendere $x_1 = 0 \neq x_2 = 1$ e si ha $f(x_1) = f(x_2) = 2$
 f non è suriettiva: infatti $f([-3, 2]) = [\frac{1}{2}, 2] \subsetneq \mathbb{R}$.

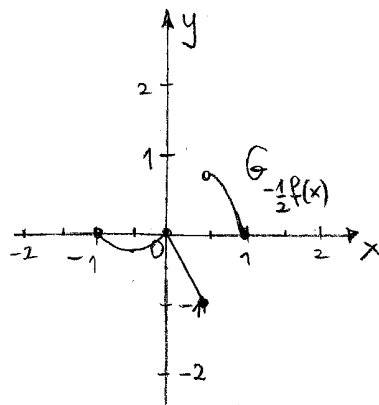
g non è iniettiva: basta prendere $x_1 = -1 \neq x_2 = 1$ e si ha $g(x_1) = -2 = g(x_2)$.

g non è suriettiva: infatti $g(\mathbb{R}) =]-\infty, -1] \cup [-\frac{1}{4}, +\infty[\subsetneq \mathbb{R}$. ■

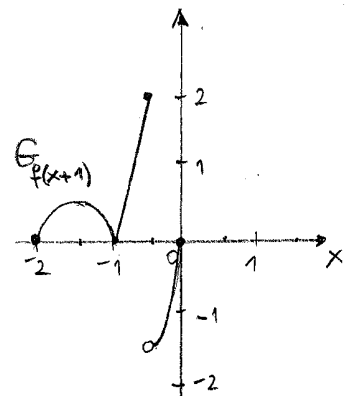
4)



$$\text{dom}\left(f(x) - \frac{1}{2}\right) = [-1, 1]$$

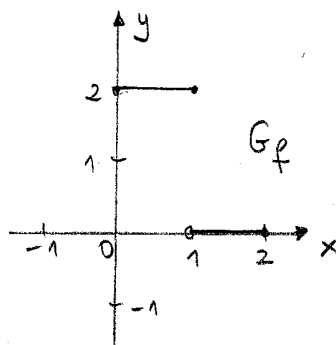


$$\text{dom}\left(-\frac{1}{2}f(x)\right) = [-1, 1]$$



$$\text{dom}(f(x+1)) = [-2, 0]$$

5) $f: [0, 2] \rightarrow \{0, 2\}$ $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{se } x \in]1, 2] \end{cases}$



Possiamo scegliere, per esempio, $A = \{0, 2\}$ (o qualunque altro insieme costituito da due elementi, di cui uno contenuto in $[0, 1]$ e l'altro in $]1, 2]$). Se A contiene un solo elemento, l'injectività è triviale.

Poiché $f([0, 2]) = \{0, 2\}$, si ha che f è una funzione suriettiva. ■