

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA CON ELEMENTI DI ALGEBRA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 12 GENNAIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti**; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Calcolate i seguenti integrali definiti interpretando gli integrali come aree:

$$\int_{-2}^5 |x-1| - 2 \, dx; \quad \int_0^1 (-2x+4) \, dx.$$

ii) Calcolate i seguenti integrali definiti:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1+x^2}{x} \, dx; \quad \int_0^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} \, dx.$$

2) i) Calcolate $\sum_{k=1}^4 f^{(k)}(1)$, dove $f^{(k)}(x)$ indica la derivata k -esima di $f(x) = \log(2x)$
(nota: $f^{(1)}(x) = f'(x)$ e $f^{(2)}(x) = f''(x)$).

ii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(x) \, dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x) \, dx + \cdots + \int_{\frac{21}{2}}^{\frac{23}{2}} f(x) \, dx.$$

iii) Determinate, al variare di $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$, il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 e^{-x}}{1 + 4x^m}$.

- 3) Sia $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -|x+2|+4 & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ 2^{-x} & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{3}{4} & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente f nel piano cartesiano.
 ii) Determinate gli eventuali punti di discontinuità della f ; individuate gli eventuali asintoti.
 iii) Calcolate $\int_{-3}^0 f(x) dx$.
-

- 4) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = (x-1)^3 e^x$$

- e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
 ii) Scrivete le equazioni di tutte le rette tangenti al grafico di f che sono rette orizzontali. Rappresentatele graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .
 iii) Provate che $F(x) = e^x[(x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 6(x-1) - 6]$ è una primitiva di f .
 iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta tangente al grafico di f in $(1, 0)$ e dalla retta $x = 2$.
-

- 5) Sia $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte; trovando eventualmente un controesempio):

- a) se $f(0) \cdot f(2) < 0$, allora $f(x_0) = 0$ per qualche $x_0 \in [-1, 3]$;
 b) se $\max_{[-1, 3]} f = f(2)$, allora $f'(2) = 0$;
 c) se $f(1) = 0$, allora la funzione integrale $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ ha un punto critico in $x = 1$.
-

- 6) (Esercizio relax!!) Sulla barra in fondo allo schermo del computer ci sono 24 icone che indicano le diverse applicazioni disponibili. Quanti sono i modi diversi in cui le icone possono essere disposte sulla barra?
-

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA CON ELEMENTI DI ALGEBRA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 12 GENNAIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti**; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti. **Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

1) i) Calcolate i seguenti integrali definiti interpretando gli integrali come aree:

$$\int_{-5}^3 |x+2| - 1 \, dx; \quad \int_0^1 (2x+3) \, dx.$$

ii) Calcolate i seguenti integrali definiti:

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1-x^3}{x} \, dx; \quad \int_2^3 \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} \, dx.$$

2) i) Calcolate $\sum_{k=1}^4 f^{(k)}(1)$, dove $f^{(k)}(x)$ indica la derivata k -esima di $f(x) = \log(3x)$ (nota: $f^{(1)}(x) = f'(x)$ e $f^{(2)}(x) = f''(x)$).

ii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione:

$$\int_{\frac{5}{4}}^{\frac{7}{4}} f(x) \, dx + \int_{\frac{9}{4}}^{\frac{11}{4}} f(x) \, dx + \cdots + \int_{\frac{25}{4}}^{\frac{27}{4}} f(x) \, dx.$$

iii) Determinate, al variare di $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$, il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + x2^{-x}}{1 + 2x^m}$.

3) Sia $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} |x+2|+3 & \text{se } -3 \leq x < -1 \\ 2^{-x} & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{5}{4} & \text{se } 0 < x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente f nel piano cartesiano.
 - ii) Determinate gli eventuali punti di discontinuità della f ; individuate gli eventuali asintoti.
 - iii) Calcolate $\int_{-3}^0 f(x) dx$.
-

4) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = (x+1)^3 e^x$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Scrivete le equazioni di tutte le rette tangenti al grafico di f che sono rette orizzontali. Rappresentatele graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .
 - iii) Provate che $F(x) = e^x[(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 6(x+1) - 6]$ è una primitiva di f .
 - iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta tangente al grafico di f in $(-1, 0)$ e dalla retta $x = 0$.
-

5) Sia $f : [-2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte; trovando eventualmente un controesempio):

- a) se $\min_{[-2,5]} f = f(1)$, allora $f(1) \leq f(x)$ per ogni $x \in [-2, 5]$;
 - b) se f è una funzione crescente, allora la funzione integrale $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ è una funzione crescente su $[-2, 5]$;
 - c) se $f(-1) \cdot f(3) < 0$, allora $f(x_0) = 0$ per qualche $x_0 \in [-2, 5]$.
-

6) (Esercizio relax!!) Sulla barra in fondo allo schermo del computer ci sono 21 icone distinte. Una di esse è il cestino ed è vincolato a stare sempre in ultima posizione. Quanti sono i modi diversi in cui le icone possono essere disposte sulla barra?
