COGNOME ____________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ____________________	A
MATRICOLA	1 2 3 4 5 6

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA CON ELEMENTI DI ALGEBRA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 26 GENNAIO 2009

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Rappresentate nel piano cartesiano xy i seguenti insiemi

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3 < y \le -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2\};$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 - 4y > -4\}.$$

ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.

2) Siano $f, g : [-2,6] \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot 2^x - 1 & \text{se } -2 \le x \le 0 \\ 3\log_3(x+3) & \text{se } 0 < x \le 6; \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x+1} & \text{se } -2 \le x \le 0 \\ -(x-1)^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ \dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{3} & \text{se } 1 \le x \le 6. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano le funzioni f e g.

ii) Determinate l'insieme $B \subseteq \mathbb{R}$ tale che $f : [-2,6] \to B$ è biiettiva. Rappresentate poi graficamente la funzione inversa $f^{-1} : B \to [-2,6]$.

iii) Determinate, se esistono, $(f+g)(-2)$, $(fg)(0)$ e $(\frac{f}{g})(1)$.

iv) Calcolate $f(0)$ e $g(3)$. Calcolate, se possibile, $(g \circ f)(0)$.

v) Rappresentate graficamente la funzione $x \mapsto 2g(x) + 1$.

vi) Calcolate $\sum_{k=1}^{4} |g(\frac{2}{k})|$.

3) i) Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$3x^2 - |x^2 - 1| + 3x \geq 0\,; \qquad \log_2(2 - |x|) - \log_2 x^2 < 0\,.$$

ii) Calcolate $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 2^x}{\log|x| + 3x^2}\,;$ $\qquad \displaystyle\int_1^3 x(1 - x^{-2})\,dx\,.$

---

4) Deducete dal grafico di $f :]-\infty, 2[\to \mathbb{R}$ (vedi disegno)

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)\,;$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to-1^-} f(x)\,;$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to-1^+} f(x)\,;$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to2^-} f(x)\,;$

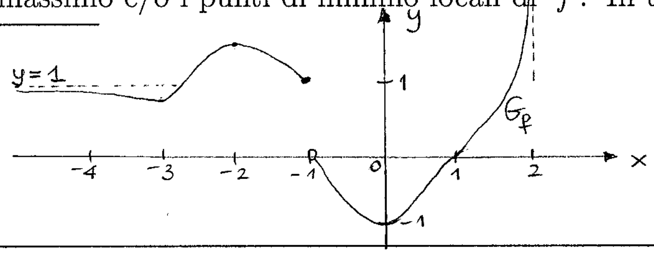
ii) gli eventuali punti di discontinuità della f;

iii) gli eventuali intervalli di monotonia della f; ;

iv) gli eventuali asintoti di f;

v) il segno della derivata f', dove esiste, e rappresentatelo sulla retta reale;

vi) i punti di massimo e/o i punti di minimo locali di f. In tali punti la f' si annulla?



---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate tutti i punti del grafico di f, nei quali la retta tangente al grafico di f ha pendenza uguale a 1. Disegnate poi tali rette.

iii) Provate che $f(x) = x - \dfrac{x}{x^2 + 1}$ per ogni x appartenente al dominio di f.

iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalle rette di equazione $y = x$ e $x = 2$.

---

6) (Esercizio relax!!) Se per il vostro piano di studi dovete scegliere 3 corsi facoltativi da una rosa di 7 corsi proposti, quante sono le possibili scelte che potete effettuare?