COGNOME ______________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA	A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 19 DICEMBRE 2008

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Provate che l'equazione $(x-1)^3 = -4x+2$ ha una ed una sola soluzione nell'intervallo $[0,1]$. Determinate un intervallo $]a,b[\subseteq [0,1]$, con $b-a \leq \frac{1}{4}$, che contiene tale soluzione.

2) i) Calcolate $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}\int_n^{n+1}\frac{1}{x+1}\,dx$; $\displaystyle\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$.

ii) Calcolate i seguenti integrali definiti:

$$\int_2^3 \frac{x^4+xe^x}{x}\,dx; \qquad \int_0^1 (\sqrt{x+1}+|x+1|)\,dx; \qquad \int_0^1 \left(e^{-2x}+\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx.$$

iii) Rappresentate graficamente la funzione $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases} -2x^2+2 & \text{se } 0\leq x<1 \\ \frac{1}{4}|x-2|-\frac{1}{4} & \text{se } 1\leq x\leq 3. \end{cases}$$

Sia $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ la funzione integrale di f definita su $[0,3]$. Determinate il massimo di F su $[0,3]$ e $F(3)$.

3) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x)=(x-1)e^{2x}$.

i) Tracciate un grafico qualitativo della f.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1,0)$.

iii) Provate che $F(x)=\dfrac{e^{2x}}{2}(x-\dfrac{3}{2})$ è una primitiva di f.

iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f, dalla retta tangente individuata in ii) e dalla retta di equazione $x=0$.

---

4) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate il massimo e il minimo di f su $[-3,-1]$.

iii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalle rette di equazione $y=\dfrac{3}{4}$ e $x=-1$.

---

5) Deducete dal grafico di f (vedi disegno)

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

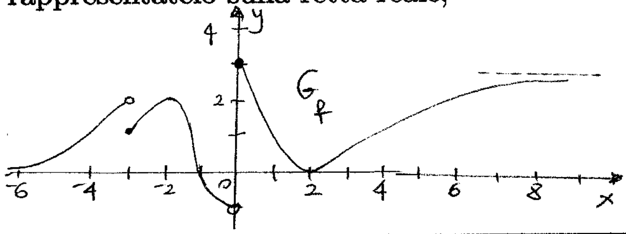
ii) i punti di discontinuità della f;

iii) il segno della funzione f e rappresentatelo sulla retta reale;

iv) gli eventuali asintoti di f;

v) il segno della derivata f' dove esiste, e rappresentatelo sulla retta reale;

vi) i massimi e/o minimi locali di f.



---

6) Sia $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte; trovando eventualmente un controesempio):

a) se $f(0)=0$ e $f'(x)<0$ per ogni $x\in]0,2[$, allora $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx<0$;

b) f è limitata in $[0,5]$;

c) se $f'(2)=0$, allora $x=2$ è un punto di massimo o di minimo locale per f.

COGNOME	____________________	NON SCRIVERE QUI	B
NOME	____________________		
MATRICOLA	________	1 2 3 4 5 6	

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

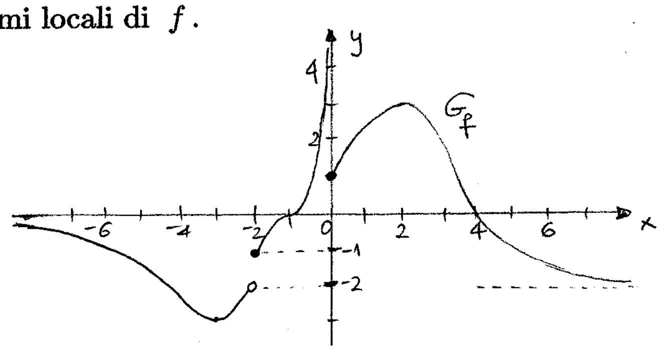
CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2008-2009 — ROVERETO, 19 DICEMBRE 2008

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **tre ore**. **È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Deducete dal grafico di f (vedi disegno)
   i) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-2^-} f(x)$; $\lim_{x\to-2^+} f(x)$; $\lim_{x\to0^-} f(x)$; $\lim_{x\to0^+} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$;
   ii) i punti di discontinuità della f;
   iii) il segno della funzione f e rappresentatelo sulla retta reale;
   iv) gli eventuali asintoti di f;
   v) il segno della derivata f', dove esiste, e rappresentatelo sulla retta reale;
   vi) i massimi e/o minimi locali di f.



2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = (1-x)e^{2x}$.
   i) Tracciate un grafico qualitativo della f.
   ii) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1, 0)$.
   iii) Provate che $F(x) = \frac{e^{2x}}{2}(\frac{3}{2} - x)$ è una primitiva di f.
   iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f, dalla retta tangente individuata in ii) e dalla retta di equazione $x = 0$.

3) i) Calcolate $\displaystyle\sum_{n=1}^{6}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x+2}\,dx\,;\quad \sum_{m=1}^{4}\frac{(-1)^{m+1}3^{-m}}{(m-1)!}\,.$

ii) Calcolate i seguenti integrali definiti:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x}-x^2e^x}{x^2}\,dx\,;\qquad \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1}+|x+2|\right)dx\,;\qquad \int_0^1 \left(e^{-3x}+\frac{e^x}{e^x+2}\right)dx\,.$$

iii) Rappresentate graficamente la funzione $f:[0,3]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases} -4|x|+4 & \text{se } 0\le x<1\\ \frac{1}{4}(x-2)^2-\frac{1}{4} & \text{se } 1\le x\le 3\,. \end{cases}$$

Sia $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ la funzione integrale di f definita su $[0,3]$. Determinate il massimo di F su $[0,3]$ e $F(3)$.

---

4) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Determinate il massimo e il minimo di f su $[1,3]$.
iii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalle rette di equazione $y=\dfrac{3}{4}$ e $x=3$.

---

5) Provate che l'equazione $(x+1)^3=-3x-2$ ha una ed una sola soluzione nell'intervallo $[-1,0]$. Determinate un intervallo $]a,b[\subseteq[-1,0]$, con $b-a\le\dfrac{1}{4}$, che contiene tale soluzione.

---

6) Sia $f:]0,5]\to\mathbb{R}$ una funzione continua e derivabile. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false (motivando le risposte; trovando eventualmente un controesempio):
a) se $f'(3)\neq 0$, allora $x=3$ non è un punto di massimo locale per f;
b) f è limitata in $]0,5]$;
c) se $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx>0$, allora $f(x)\ge 0$ su $[2,3]$.
