Vogliamo costruire un campo di estremali con $G =]0,1[\times \mathbb{R}$. L'eq. di Eulero-Lagrange per f è $u'' + u = 0$ su $]0,1[$.

Abbiamo allora che $\underline{\underline{u_\alpha(x) = \alpha \sin x}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, è una famiglia di estremali per f.

Sia ora $(x_0, z_0) \in G =]0,1[\times \mathbb{R}$; allora $\underset{\overset{\shortparallel}{z_0}}{u_{\alpha_0}(x_0)} = \alpha_0 \sin x_0 \iff$

$$\alpha_0 = \frac{z_0}{\sin x_0} \qquad (\text{importante che } x_0 \neq 0).$$

Notiamo che la funzione pendenza del campo di estremali $h(x,\alpha) = (x, u(x,\alpha))$ in (x_0, z_0) deve soddisfare

$$P(x_0, z_0) = u'_{\alpha_0}(x)\Big|_{x=x_0} = (\alpha_0 \sin x)'\Big|_{x=x_0} = \alpha_0 \cos x_0 .$$

Si ha $P(x_0, z_0) = \alpha_0 \cos x_0 = \dfrac{z_0}{\sin x_0} \cos x_0$. Dall'arbitrarietà di (x_0, z_0) segue che $\underline{\underline{P(x,z) = \dfrac{z}{\sin x} \cos x}}$ su $\underline{\underline{G =]0,1[\times \mathbb{R}}}$ è la funzione pendenza del campo di estremali rispetto alla Lagrangiana f. $\square$

Vogliamo allora provare la seguente

<u>Proposizione</u>: Sia $f \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Sia $h(x,\alpha) = (x, u(x,\alpha))$ un campo di estremali rispetto ad f. Sia P la sua pendenza. Allora

$$(*) \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{f}(x,z) - P(x,z)\,\overline{f}_\xi(x,z)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\,\overline{f}_\xi(x,z) \qquad \forall (x,z) \in G.$$

L'eq. $(*)$ prende il nome di <u>eq. di Eulero</u> (modificata) per il campo.

<u>Notazione</u>: Nell'eq. $(*)$ abbiamo usato la seg. notazione: data una funzione di tre variabili $g(x,z,\xi)$ con $(x,z) \in G$, poniamo $\overline{g}(x,z) = g(x,z,P(x,z))$.

<u>OSS.</u> In questa parte, useremo sia la notazione $g(x,z,\xi)$ che $g(x,u,\xi)$. È più chiara la notazione $z = u(x)$ (quando ci serve) che $u = u(x)$.

<u>Dim. di ⊛</u> :

Notiamo che

(i) $$\frac{\partial}{\partial z}\left[\bar{f}(x,z) - P(x,z)\,\bar{f}_\xi(x,z)\right] = \bar{f}_z(x,z) + \cancel{\bar{f}_\xi(x,z)\,P_z(x,z)}$$
$$- \cancel{P_z(x,z)\,\bar{f}_\xi(x,z)} - \bar{f}_{\xi z}(x,z)\,P(x,z) - \bar{f}_{\xi\xi}(x,z)\,P_z(x,z)\,P(x,z)$$

(ii) $$\frac{\partial}{\partial x}\bar{f}_\xi(x,z) = \bar{f}_{\xi x}(x,z) + \bar{f}_{\xi\xi}(x,z)\,P_x(x,z)$$

Sfruttiamo ora l'ipotesi che P è la funzione pendenza del campo di estremali rispetto ad f.

Fissiamo $(x_0,z_0)\in G$ e vogliamo provare ⊛ in (x_0,z_0).

Se risolviamo $\begin{cases} u_\alpha'(x) = P(x, u_\alpha(x)) \\ u_\alpha(x_0) = z_0 \end{cases}$

allora per l'ipotesi di funzione pendenza per il campo di estremali rispetto ad f, la soluzione dell'eq. diff. sopra risolve l'eq. di Eulero-Lagrange associata ad f, ossia

$$f_{\xi x}(x,u_\alpha,u_\alpha') + f_{\xi z}(x,u_\alpha,u_\alpha')\,u_\alpha' + f_{\xi\xi}(x,u_\alpha,u_\alpha')\,u_\alpha'' = f_z(x,u_\alpha,u_\alpha').$$

Calcolando tale eq. in x_0, ossia

$$(x_0, u_\alpha(x_0), u_\alpha'(x_0)) = (x_0, z_0, P(x_0,z_0))$$

si ottiene

(iii) $$\bar{f}_{\xi x}(x_0,z_0) + \bar{f}_{\xi z}(x_0,z_0)\,P(x_0,z_0) + \bar{f}_{\xi\xi}(x_0,z_0)\,P_x(x_0,z_0) + \bar{f}_{\xi\xi}(x_0,z_0)\,P_z(x_0,z_0)\,P(x_0,z_0) = \bar{f}_z(x_0,z_0).$$

Notiamo che $u_\alpha''(x) = P_x(x,u_\alpha(x)) + P_z(x,u_\alpha(x))\,u_\alpha'(x)$, per cui

$$u_\alpha''(x_0) = P_x(x_0,z_0) + P_z(x_0,z_0)\,P(x_0,z_0).$$

Calcolando (i) e (ii) in (x_0,z_0) e sfruttando (iii), si ottiene ⊛ in (x_0,z_0).

Dall'arbitrarietà di (x_0,z_0), si ottiene ⊛ su G.

□

Osserviamo che l'eq. di Eulero modificata ⊛ per il campo equivale all'affermazione che la forma differenziale ω su G definita da

$$\omega(x,z) \doteq \left[\bar{f}(x,z) - P(x,z)\bar{f}_\xi(x,z)\right]dx + \bar{f}_\xi(x,z)dz$$

è chiusa. Poiché G è semplicemente connesso, questo implica che ω è una 1-forma esatta, cioè esiste una funzione scalare $S^{⊛}: G \to \mathbb{R}$ (unica a meno di una costante additiva) di classe $\mathcal{C}^2$ tale che $\omega(x,z) = dS(x,z)$, ossia

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \bar{f} - P\bar{f}_\xi \qquad \frac{\partial S}{\partial z} = \bar{f}_\xi \qquad \text{in } G,$$

note come <u>equazioni di Carathéodory</u>.

È naturale allora dare la seg.

<u>Def.</u> Sia γ un cammino qualunque in G. Si definisce <u>integrale</u> invariante di Hilbert (rispetto ad f)

$$H(\gamma) = \int_\gamma \omega \; \bullet$$

Se γ è dato dal grafico di una funzione $v: [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$, allora l'integrale invariante di Hilbert diventa

$$H(v) \doteq H(\gamma) = \int_\gamma \left[\bar{f}(x,z) - P(x,z)\bar{f}_\xi(x,z)\right]dx + \bar{f}_\xi(x,z)dz =$$

$$= \int_a^b \left[\bar{f}(x,v(x)) + \left(v'(x) - P(x,v(x))\right)\bar{f}_\xi(x,v(x))\right]dx .$$

Si ottiene inoltre $H(v) = S(b,v(b)) - S(a,v(a))$. Risulta allora

⊛ S funzione eikonale.

$\bullet$ $\int_\gamma \omega \doteq \int_a^b \omega(\underline{\alpha}(t))\,\underline{\alpha}'(t)dt = \sum_{j=1}^{2}\int_a^b \omega_j(\underline{\alpha}(t))\alpha_j'(t)dt$ dove $\underline{\alpha}: [a,b] \to \mathbb{R}^2$ continua $\mathcal{C}^1$ a tratti su $[a,b]$ e $\underline{\alpha}([a,b]) = \gamma$.

che H assume lo stesso valore su tutte le funzioni v che hanno gli stessi valori al bordo.

In particolare, se $u_\alpha(x)$ $(\alpha \in]\alpha_1, \alpha_2[,\ x \in [a,b])$ è un <u>estremale immerso nel campo</u> (i.e., si ha $u_\alpha'(x) = P(x, u_\alpha(x))$), allora

$$H(u_\alpha) = \int_a^b f(x, u_\alpha, u_\alpha')\, dx = F(u_\alpha).$$

Se poi v è una qualunque funzione che ha le stesse condizioni al contorno di u_α, allora

$$\begin{aligned} F(v) - F(u_\alpha) &= F(v) - H(u_\alpha) = \\ &= F(v) - H(v) \\ &= \int_a^b \mathcal{E}(x, v(x), P(x, v(x)), v'(x))\, dx \end{aligned}$$

dove $\mathcal{E}$ è la funzione eccesso di Weierstrass introdotta a pag. 110.
$\left(\mathcal{E}(x, u, \xi, \eta) = f(x, u, \eta) - f(x, u, \xi) - f_\xi(x, u, \xi)(\eta - \xi)\right)$.

Abbiamo allora provato il seguente

<u>Teorema 1</u>: Sia $f \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, sia h un campo di estremali su G con pendenza P. Allora per ogni estremale $u_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ immerso nel campo (i.e. $u_0'(x) = P(x, u_0(x))$ $\forall x \in [a,b]$) si ha

u_0 pt. di minimo assoluto!

$$F(v) \geq F(u_0)$$

per ogni $v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ t.c. graf $v \subset G$ e $v(a) = u(a)$, $v(b) = u(b)$ se $\mathcal{E}(x, v(x), P(x, v(x)), v'(x)) \geq 0$ su $[a,b]$; inoltre

u_0 pt. di minimo assoluto stretto!

$$F(v) > F(u_0)$$

se inoltre $\mathcal{E}(x, v(x), P(x, v(x)), v'(x))$ non è identicamente zero.

<u>NOTA</u>: Se il campo di estremali soddisfa la condizione di Weierstrass forte $\mathcal{E}(x, z, P(x,z), \eta) > 0$ $\forall (x,z) \in G$ e $\forall \eta \in \mathbb{R}$ t.c. $\eta \neq P(x,z)$ allora si chiama <u>campo di Weierstrass.</u>

Da questo teorema si deduce allora il seguente

<u>Corollario</u>: Sia $u_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ un estremale immerso in un campo di estremali su G. Allora

ⓐ u_0 è un punto di minimo relativo debole per F se soddisfa la condizione di Legendre stretta

$$f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) > 0 \quad \forall x \in [a,b],$$

ⓑ u_0 è anche un punto di minimo relativo forte per F se u_0 soddisfa la condizione di Legendre forte

$$f_{\xi\xi}(x, u_0(x), \xi) > 0 \quad \forall x \in [a,b], \ \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

<u>Dim.</u> Usando la formula di Taylor con resto di Lagrange alla funzione eccesso di Weierstrass otteniamo che $\exists\, 0 < \vartheta < 1$ t.c.

$$\mathcal{E}(x, v(x), P(x,v(x)), v'(x)) \overset{\circledast}{=} \frac{1}{2} f_{\xi\xi}(x, v(x), P(x,v(x)) + \vartheta(v'(x) - P(x,v(x))) \cdot (v'(x) - P(x,v(x)))^2$$

Proviamo ⓐ: Dalla continuità delle funzioni coinvolte e dalla condizione di Legendre stretta segue che $\exists\, \delta > 0$ t.c. $\forall v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $\operatorname{graf} v \subset G$ e $v(a) = u_0(a)$, $v(b) = u_0(b)$, $\|v - u_0\|_{\mathcal{C}^1([a,b])} < \delta$ si ha $\mathcal{E}(x, v(x), P(x,v(x)), v'(x)) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$ e, dal Teorema precedente, $F(v) > F(u_0)$.

Proviamo ⓑ: Come in ⓐ, ma con $\|v - u_0\|_{\mathcal{C}^0([a,b])} < \delta$ ... $\square$

$\circledast$ $f(x,v,v') - f(x,v,P(x,v)) - f_\xi(x,v,P(x,v))(v' - P(x,v)) = \mathcal{E}(x, v(x), P(x,v(x)), v'(x))$

Rimane da rispondere alla seg. domanda: quand'è che un dato estremale u_0 può essere immerso in un campo di estremali?
Vale il seguente risultato (vedi [GH], Thm. 2, pag. 290)

<u>Teorema 2</u>: Se $u_0(x)$ è un estremale che soddisfa la condizione di Legendre stretta su $[a,b]$, e se $[a,b]$ non contiene coppie di punti coniugati relativi all'estremale u_0, allora u_0 può essere immerso in un campo (di classe $\mathcal{C}^3$) di estremali dati da $z = u(x,\alpha)$ $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$, $x \in [a,b]$.

Concludiamo allora con la principale "condizione sufficiente" affinché un estremale sia un pt. di minimo rel. forte per un funzionale F con funzione lagrangiana di classe $\mathcal{C}^3$.

<u>Teorema 3</u>: Un estremale $u_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ è un pt. di minimo relativo forte (stretto) per
$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,dx$$
se

i) l'intervallo $[a,b]$ non contiene coppie di pt. coniugati relativi ad u_0;

ii) esiste un intorno aperto $\mathcal{U}$ del grafico di u_0 in $[a,b] \times \mathbb{R}$ t.c. vale il seguente rafforzamento della condizione di Legendre:
$$f_{\xi\xi}(x, u, \xi) > 0 \qquad \forall (x, u, \xi) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}.$$

<u>Es. 1</u> Consideriamo il funzionale integrale $F(u) = \int_0^1 u u'^2\,dx$ su
$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = 1,\ u(1) = 1\}.$$

i) Verificate che $u_0 \equiv 1$ è un estremale di F in X.

ii) Usando la teoria dei campi di estremali e pendenza, verificate che u_0 è un pt. di minimo relativo forte per F su X.

iii) Osservate che F non ammette minimo assoluto su X.

Svolgimento:

i) $f(x,u,\xi) = f(u,\xi) = u\xi^2$ è la nostra funzione lagrangiana. Si ha

$f_\xi(u,\xi) = 2u\xi$; $f_{\xi\xi}(u,\xi) = 2u$; $f_u(u,\xi) = \xi^2$.

L'eq. di Eulero-Lagrange è $\frac{d}{dx}\left[2uu'\right] = u'^2$, ossia

$2u'^2 + 2uu'' = u'^2$ da cui $u'^2 + 2uu'' = 0$. Ovviamente $u_0 \equiv 1$

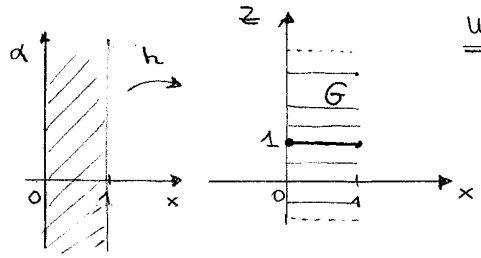
è soluzione di quest'eq. ; inoltre $u_0 \in X$.

ii) Verifichiamo subito che $u_0 \equiv 1$ soddisfa la cond. nec. di Weierstrass:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x,u,\xi,\eta) &= u\eta^2 - u\xi^2 - 2u\xi(\eta-\xi)\\ &= u\eta^2 - u\xi^2 - 2u\xi\eta + 2u\xi^2\\ &= u\eta^2 - 2u\xi\eta + u\xi^2 = u(\eta-\xi)^2\end{aligned}$$

e quindi $\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) = \mathcal{E}(x,1,0,\eta) = \eta^2 \geq 0 \ \forall \eta \in \mathbb{R}$.

Notiamo che $u_0 \equiv 1$ su $[0,1]$ può essere immerso facilmente in un campo di estremali: basta considerare la famiglia di estremali



$u_\alpha(x) = u(x,\alpha) = \alpha$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R} \quad x \in [0,1]$

$G = [0,1] \times \mathbb{R}$

$(h(x,\alpha) = (x, u(x,\alpha))$ campo di estremali$)$

nostro estremale

e risulta $u_0(x) = u(x,1)$ ⊛ !

La funzione pendenza è data banalmente da $P(x,z) = 0 \ \forall (x,z) \in G$.

Osserviamo che

$$f_{\xi\xi}(x,u,\xi) = 2u$$

e quindi

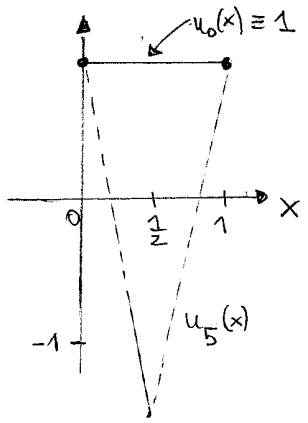
$$f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) = 2u_0(x) \equiv 2 > 0;$$ (è quindi soddisfatta la cond. di Legendre stretta)

Inoltre $f_{\xi\xi}(x, u_0(x), \xi) = 2 > 0 \quad \forall x \in [a,b] \ \forall \xi \in \mathbb{R}$. (cond. di Legendre forte).

Dal cond. ⓑ pag. 130 segue allora che $u_0 \equiv 1$ è un punto di minimo relativo forte per F. Vale $F(u_0) = 0$.

⊛ non fateci confondere dalla notazione!

iii)



Consideriamo $(u_k)_k$ la succ. di funz. def. da

$$u_k(x) = \begin{cases} -kx+1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ kx+1-k & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$k > 4$

(oss. che $u_k \notin \mathcal{C}^1$, ma basta arrotondare u_k nel punto angoloso; inoltre $u_k(0) = u_k(1) = 1$). Abbiamo

$$F(u_k) = \int_0^{\frac{1}{2}} (-kx+1)\, k^2\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (kx+1-k)\, k^2\, dx =$$

$$= k^2 \left[-\frac{kx^2}{2} + x \right]_0^{\frac{1}{2}} + k^2 \left[\frac{kx^2}{2} + (1-k)x \right]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= k^2 \left(1 - \frac{k}{4}\right) < 0 \quad \text{per } k > 4.$$

Come osservato sopra possiamo facilmente trovare $(\tilde{u}_k)_k \subset \mathcal{C}^1([0,1])$ con $\tilde{u}_k(0) = \tilde{u}_k(1)$ e $\lim_{k \to +\infty} F(\tilde{u}_k) = -\infty$. Allora

$$\inf_{u \in X} F(u) = -\infty$$

e F non ammette minimo assoluto su X. $\square$

<u>Es. 2.</u> Vogliamo studiare la natura dell'estremale $u_0 \equiv 0$ di

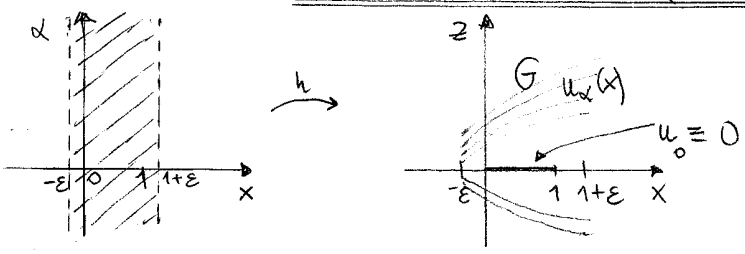
$$F(u) = \int_0^1 [u'^2 - u^2]\, dx \quad \text{su} \quad X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

<u>Svolgimento:</u>

L'eq. di Eulero-Lagrange è $u'' + u = 0$ su $[0,1]$ e $u_0 \equiv 0$ è l'unica estremale di F in X.

Oss. che tale estremale può essere immersa in una famiglia di estremali: $\underline{\underline{u_\alpha(x) = u(x,\alpha) = \alpha \sin(x + 2\varepsilon)}}$ $\varepsilon > 0$ fissato

su $]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\times \mathbb{R}$



Fissato $(x_0,z_0)\in\,]-\varepsilon,1+\varepsilon[\times\mathbb{R}=G$ $\exists!\ \alpha_0=\alpha(x_0,z_0)$ t.c. $z_0=\alpha_0\sin(x_0+2\varepsilon)$

ossia $\alpha_0=\dfrac{z_0}{\sin(x_0+2\varepsilon)}$.

Allora $P: G\to\mathbb{R}$ la funzione pendenza è data da $P(x_0,z_0)=u_{\alpha_0}'(x)\big|_{x=x_0}$ $=\alpha_0\cos(x_0+2\varepsilon)$. Dall'arbitrarietà di (x_0,z_0) si ottiene che $P(x,z)=\dfrac{z}{tg(x+2\varepsilon)}$ $\forall(x,z)\in G$.

Notiamo che $f_{\xi\xi}(x,u,\xi)=2$ $\forall(x,u,\xi)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e in particolare $f_{\xi\xi}(x,0,\xi)>0$ $\forall x\in[0,1]$, $\forall\xi\in\mathbb{R}$, cioè u_0 verifica la condizione di Legendre forte. Dal Corollario (b) pag. 130 segue allora che u_0 è un pt. di minimo relativo forte di F.

<u>NOTA</u>: Abb. già osservato nell'es. pag. 122 che $u_0\equiv 0$ è un pt. di minimo relativo debole di F su X. Nella dim. si è provato che l'intervallo $[0,1]$ non contiene coppie di pt. coniugati relativi ad u_0. Oss. poi che $f_{\xi\xi}(x,u,\xi)=2$ $\forall(x,u,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, si ottiene che $u_0\equiv 0$ è un pt. di min. relativo (stretto) per F applicando il Teorema 3, pag. 131. $\square$

Infine notiamo che $f_{\xi\xi}(x,u,\xi)=2$ $\forall(x,u,\xi)\in[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ implica (Taylor) $\mathcal{E}(x,v(x),P(x,v(x)),v'(x))\geq 0$ su $[0,1]$ e >0 se $v'(x)\neq P(x,v(x))$ $\forall v\in\mathcal{C}^1([0,1])$, $\operatorname{graf} v\subset G$ e $v(0)=v(1)=0$, e quindi $u_0\equiv 0$ è un pt. di minimo assoluto (stretto) per F su X. $\square$

<u>Es. 3</u> Vogliamo studiare il problema variazionale $\inf\limits_{u\in X}F(u)$, dove

$$F(u)=\int_0^1(u^2-1)^2\,dx\ ,\qquad X=\{u\in\mathcal{C}^1([0,1]):\ u(0)=0,\ u(1)=k\}.$$

Proviamo che

i) per $|k|\geq 1$, $u_0(x)=kx$ è un pt. di minimo assoluto per F su X;

ii) per $|k|>1$, " è un pt. di minimo assoluto stretto " ;

iii) per $|k|<1$, " non è un pt. di minimo relativo forte " ;

iv) per $k=0$, $u_0(x)\equiv 0$ non è un pt. di minimo relativo debole " ;

v) per $|k|<1$, $\nexists$ono minimi relativi forti per F su X;

vi) per $k=0$, $\nexists$ono minimi relativi deboli per F su X;

vii) per $|k|>\frac{1}{\sqrt{3}}$, $u_0(x)=kx$ è un pt. di minimo relativo debole per F su X.

<u>Svolgimento</u>: Consideriamo la funzione lagrangiana

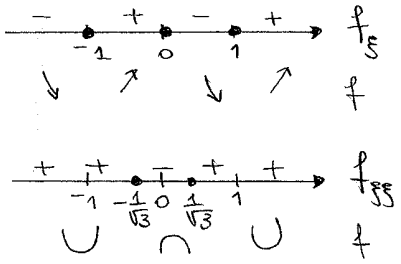
$$f(x,u,\xi) = f(\xi) = (\xi^2-1)^2 \qquad \text{su } \mathbb{R}.$$

Allora $f(\xi) \geq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}$ e $f(\xi)=0 \iff \xi = \pm 1$.

$$f_\xi(\xi) = 4\xi(\xi^2-1)$$

$$f_{\xi\xi}(\xi) = 4(\xi^2-1) + 8\xi^2 = 12\xi^2-4$$

$$= 4(3\xi^2-1)$$



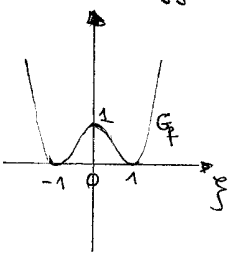
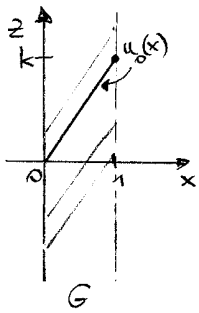


grafico qualitativo di f

L'eq. di Eulero-Lagrange per F risulta $\frac{d}{dx}\left[f_\xi(u')\right]=0$, ossia $f_\xi(u') = \text{cost}$.

Segue che $u_0(x) = kx$ è un estremale per F, e $u_0 \in X$.

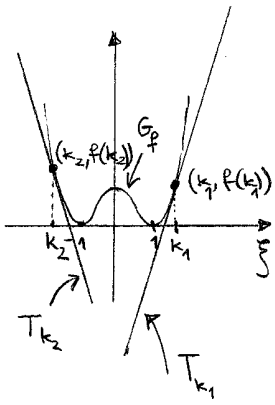


Come abbiamo visto nell'es. 1, pag. 125, l'estremale u_0 può essere immerso nel campo di estremali $h(x,\alpha) = (x, u_\alpha(x))$ con

$$u_\alpha(x) = u(x,\alpha) = kx+\alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

e la funzione pendenza $P(x,z) \equiv k$ su $G = [0,1]\times\mathbb{R}$.

i) Vogliamo allora usare il Teorema 1, pag. 129. Proviamo che $\mathcal{E}(x,z,P(x,z),\eta) \geq 0 \ \forall (x,z)\in G, \forall \eta \in \mathbb{R}$ e quindi si ha $\mathcal{E}(x,v(x),P(x,v(x)),v'(x)) \geq 0 \ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ t.c. graf $v \subset G$ e $v(0)=0$, $v(1)=k$; dunque $F(v) \geq F(u_0) \ \forall v \in X$.



Oss. che in questo caso $\forall z,\eta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{E}(x,z,P(x,z),\eta) = \mathcal{E}(x,z,k,\eta) =$$
$$= f(\eta) - f(k) - f_\xi(k)(\eta-k)$$
$$= f(\eta) - T_k(\eta),$$

dove $T_k(\eta)$ è l'eq. della retta tangente al grafico di f nel pt. $(k, f(k))$.

Si ha allora immediatamente che $\forall k \in \mathbb{R}$, con $|k| \geq 1$

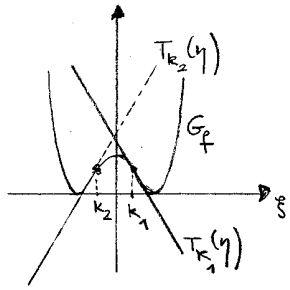
$$\mathcal{E}(x,z,k,\eta) = f(\eta) - T_k(\eta) \geq 0 \qquad \forall \eta \in \mathbb{R}.$$

ii) Per ogni $k \in \mathbb{R}$, $|k| > 1$, si ha $\mathcal{E}(x, z, \overset{=k}{P(x,z)}, \eta) > 0 \quad \forall (x,z) \in G$ e $\forall \eta \neq P(x,z) = k$ (il campo di estremali è un campo di Weierstrass) e quindi, nuovamente dal Teorema 1, pag. 129, segue che

$$F(v) > F(u_0)$$

$\forall v \in X$, provando che $u_0(x) = kx$ è un pt. di minimo assoluto stretto per F su X.

iii) Osserviamo che $\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) = \mathcal{E}(x, kx, k, \eta) = f(\eta) - T_k(\eta)$, dove $T_k(\eta)$ è l'eq. della retta tangente al grafico di f nel pt. $(k, f(k))$. Dal grafico di f si vede subito che per $k \in \mathbb{R}$, $|k| < 1$, $u_0(x)$ non verifica la condizione necessaria di Weierstrass, ossia $\mathcal{E}(x, u_0(x), u_0'(x), \eta) \geq 0 \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$.



iv) Basta osservare che $f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) = f_{\xi\xi}(0) = -4 < 0$ (in $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ la funzione Lagrangiana è concava!) e quindi $u_0(x) \equiv 0$ non soddisfa la condizione necessaria di Legendre!

v) Supponiamo per assurdo che esistono pt. di minimo rel. forti di F su X, allora devono soddisfare l'eq. di Eulero $\frac{d}{dx}\left[f_\xi(u')\right] = 0$, ossia $f_\xi(u') = c$.

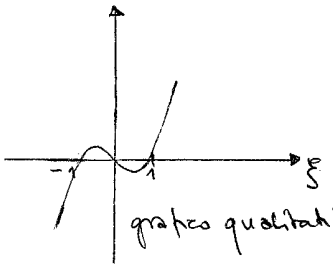


grafico qualitativo di f_ξ

$$f_\xi(\xi) = 4\xi(\xi^2 - 1)$$

(polinomio di 3° grado)

Risulta che $u' \in (f_\xi)^{-1}(c)$: u' è continua e deve "vivere" su un insieme finito di punti. Risulta allora $u'(x) = \text{costante}$ e quindi deve essere $u(x) = kx$ con k la costante data nelle condizioni al bordo; ma questo estremale non è un pt. di minimo relativo forte per F su X per il pt. iii).

vi) Analogamente al pt. v) usando iv).

vii) Basta applicare il Corollario ② pag. 130 e otteniamo che l'estremale $u_0(x) = kx$ (immerso in un campo di estremali) soddisfa la cond. di Legendre stretta

$$f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

se e solo se $|k| > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Se $|k| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ allora $f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) < 0$ $\forall x \in [0,1]$ e quindi u_0 non può essere un pt. di minimo relativo debole.

Se $|k| = \frac{1}{\sqrt{3}}$, allora $f_{\xi\xi}(x, u_0(x), u_0'(x)) \equiv 0$ e nulla si può dire a priori.

$\square$