[Giusti: Metodi diretti nel CdV, UMI, 1994]

Metodo diretto (del Calcolo delle Variazioni) [BGH – Introduzione]

(A) Abbiamo finora esposto L'approccio indiretto classico del CdV (metodi indiretti). [sviluppato nei primi 200 anni della storia del CdV ~1690 (Bernoulli) ~1900 (Weierstrass) Jacobi, Dirichlet]

- Questo approccio è basato sull'idea ottimista che ogni prob. di minimo ha soluzione (idea naive!). Per determinare questa soluzione si cerca

  (i) condizioni necessarie che deve soddisfare un minimizzante

  ($\delta F(u,v)=0$ .... $\Rightarrow$ Equazione di Eulero-Lagrange che deve soddisfare u minimizz. $F: \mathcal{C} \to \mathbb{R}$, u interno in $\mathcal{C}$)

  Studiando bene le condizioni necessarie si possono spesso eliminare dei candidati e identificare una sola soluzione. Se si trova una sola soluzione dell'eq. di Eulero-Lagrange soddisfacente le cond. al contorno (per es.) allora si è indotti a dedurre che questa è una soluzione del prob. di minimo. Ma questa conclusione può essere falsa!! Il prob. di minimo non è detto che abbia una soluzione!!

  → Infatti, si deve dim. prima l'esistenza di un minimo per poter dedurre che un'unica soluzione dell'eq. di Eulero-Lagrange soddisfacente tutte le condizioni ulteriori richieste dal prob. (per esempio: condizioni al contorno, condizioni isoperimetriche ....) sia un pt. di minimo,

  → oppure provando che la nostra funzione candidata u soddisfi $F(u) \leq F(v)$ per ogni altra funzione ammissibile v.

- Abbiamo visto nelle lezioni precedenti che il pbm. è ancora più complicato!! Infatti, abbiamo visto che una funzione minimizzante di classe $\mathcal{C}^1$ non è necessariamente di classe $\mathcal{C}^2$ (pag. 37) e quindi una soluz. dell'eq. di Eulero-Lagrange (di tipo (EE) pag. 34).
  Inoltre, non è sempre vero che un'eq. di Eulero-Lagrange possiede una soluzione (classica) che soddisfi le condizioni ulteriori prescritte (pag. 47, 78).

(ii) Se ci sono più soluzioni dell'eq. di Eulero-Lagrange (estremali), quale di queste è un punto di minimo (relativo o globale)?
La <u>convessità</u> del funzionale ci dà una <u>condizione sufficiente</u> affinché un estremale sia un pt. di minimo globale (assoluto).
<u>La teoria di Jacobi dei pt. coniugati</u> ci dà <u>condizioni</u> sufficienti per un estremale ad essere un pt. di minimo relativo debole.
<u>La teoria dei campi di Weierstrass</u> (insieme alla teoria dei pt. coniugati) ci dà <u>condizioni sufficienti</u> per un estremale ad essere un pt. di minimo relativo forte.

<u>OSS. ulteriore</u>: L'uso dell'eq. di Eulero-Lagrange è particolarmente indicato quando si vuole trovare una <u>soluzione esplicita</u> del pbm. di minimo; in particolare, quando si ottiene un'eq. diff. ordinaria che si può integrare esplicitamente!! (libro di Euler 1952)
Il metodo indiretto diventa però molto meno agile da usare quando si hanno integrali pluridimensionali!! Allora le eq. di Eulero-Lagrange conducono a eq. alle derivate parziali!! Difficoltà a trovare soluzioni esplicite! Già nel caso dell'integrale di Dirichlet $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, si ottiene che l'eq. di Eulero-

u soluz. $\Delta u = 0$ funzioni armoniche!

Lagrange è l'eq. di Laplace $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$ su Ω

e una soluzione esplicita di quest'eq. si ottiene solo per una geometria particolarmente semplice di Ω ($n=2$ o 3 simmetria sferica $n=3$ simmetria cilindrica).

si inverte il punto di vista!! (B) Quindi si cerca di <u>affrontare il problema di minimo direttamente</u>, <u>dimostrando subito l'esistenza di un minimizzante</u>. Questo a sua volta dà poi (in generale, se si ottengono risultati di regolarità per la funzione minimizzante) un teorema di esistenza per le soluzioni delle eq. di Eulero soddisfacenti le restrizioni prescritte (per esempio; condizioni al contorno).

[Gauss, Kelvin, Dirichlet] Riemann [1892] cercava le funzioni armoniche!!!

→ soluzione per l'integrale di Dirichlet [1900; 1904]

gli inizi!! principio di Dirichlet

L'idea di fondo (Riemann, Arzelà, Hilbert) consiste nel considerare il funzionale $F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ come un'applicazione $F: V \to \mathbb{R}$, V spazio di funzioni opportuno che soddisfano su $\partial\Omega$ le condizioni al bordo, e <u>nell'assumere</u> che ad F si possa applicare una generalizzazione del teorema di Weierstrass (*). Una volta <u>assunta</u> la sua esistenza, un tale minimo sarà automaticamente una funzione armonica.

<u>Riemann</u> apre così la strada all'approccio dei <u>metodi diretti del CdV</u>, che consiste nel provare l'esistenza del minimo di un funzionale integrale F (poi regolarità del minimo ecc...) senza l'uso dell'equazione di Eulero.

(*) <u>Teorema (di Weierstrass)</u>: Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme compatto, $F: K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora F ammette minimo e massimo assoluti.

<u>Variante (solo per il minimo)</u>: Sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$, allora F ammette minimo assoluto.

cond. di coercitività

Per dim. la variante basta osservare che per $\lambda \in \mathbb{R}$ sufficientemente grande, l'insieme $K_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$ è chiuso, non vuoto e limitato (grazie all'ipotesi sul limite di f) e quindi esiste un pt. di minimo di $f|_{K_\lambda}$ ristretto al compatto K_λ. Questo è ovviamente il pt. di minimo cercato!

Notiamo che per studiare in modo completo il problema del minimo per funzionali integrali in generale si dovevano mettere prima in luce due fatti fondamentali:

(i) riconoscere nella <u>semicontinuità</u>, al posto della continuità, l'ipotesi centrale per l'applicazione del teorema di Weierstrass al funzionale F (ed è quanto basta quando si cercano solo pt. di minimo!)

(ii) riconoscere la <u>necessità di un adeguato quadro funzionale</u>, cioè capire che era necessario introdurre nuovi spazi funzionali (non solo $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}$, e simili ...) e dimostrare per questi spazi risultati di <u>compattezza</u> analoghi a quelli di Ascoli e Arzelà. (*)

Teorema di Weierstrass:
"s.c.i."
+ "compattezza sottolivelli" (= coercitività)
$\Downarrow$
Esistenza di un pt. di minimo per F

<u>OSS. IMPORTANTE</u>: L'applicazione dell'idea di Weierstrass (o variante) a funzionali in dimensione infinita non è però così immediata: la ragione sta nel fatto che le due proprietà sono in un certo senso in concorrenza: per avere la s.c.i. di F conviene dotare lo spazio delle funzioni V di una topologia relativamente forte: meno successioni convergenti ci sono, più è facile che il funzionale sia s.c.i.

Per la compattezza è invece meglio la situazione opposta: più la convergenza è debole, più è facile che le successioni convergano

(nota: in uno spazio normato la palla unitaria chiusa è compatta se e soltanto se la dimensione dello spazio è finita. Per questa ragione, sarà molto difficile che un sottolivello di un funzionale integrale come quelli che abbiamo considerato fino ad ora possa essere compatto nella topologia data da una norma sulle funzioni ammissibili ...)

(*) <u>Teorema (Ascoli-Arzelà)</u>: Sia $\{u_n\} \subset \mathcal{C}^0([a,b])$ una succ. equilimitata (i.e. $\exists M>0$ t.c. $|u_n(x)| \le M \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]$) ed equicontinua (i.e. $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ t.c. $\forall x,y \in [a,b]$ con $|x-y|<\delta$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $|u_n(x)-u_n(y)|<\varepsilon$), allora $\exists$ una sottosuccessione convergente uniformemente ad una funzione continua $u:[a,b] \to \mathbb{R}$.

<u>NOTA</u>: Il teorema di AA vale anche per $\{u_n\} \subset \mathcal{C}^0([a,b];K)$, <u>$K$ uno spazio metrico compatto</u>, $\{u_n\}$ equicontinue. In questo caso la distanza uniforme tra due funzioni $f,g:[a,b] \to K$ si definisce $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} \{d(f(x),g(x))\}$. Risulta $\mathcal{C}^0([a,b];K)$ con d_∞ è ancora completo!

<u>Primi risultati</u> :

[Tonelli] 1920-23 : introduce la semicontinuità inferiore ; ottiene teoremi di esistenza per funzionali $F(u)=\int_a^b f(x,u,u')\,dx$ nell'ambito delle funzioni <u>assolutamente continue</u> , e a variazione limitata.

<u>caso di funzioni di più variabili</u> : richiede un progresso dell'analisi funzionale e l'introduzione degli spazi di Sobolev (1938) (Morrey 1940)

La soluzione del problema dell'esistenza del minimo in spazi di Sobolev apre poi un altro tipo di questioni : le funzioni sono solo derivabili in senso debole , e in generale , non sono nemmeno continue . Il pbm. della regolarità delle soluzioni è rimasto aperto per molto tempo : un risultato fondamentale in questa direzione è dovuto a [De Giorgi] 1957 (hölderianità delle soluzioni di eq. in forma di divergenza : $\sum_{ij} D_i\left(a_{ij}(x)D_j u\right)=0$ con $a_{ij}\in L^\infty$, ed ellittiche $\left(\sum a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \nu>0\right)$).

in senso debole $\int_\Omega \sum_{ij} a_{ij}\, D_j u\, D_i\varphi\, dx=0$ $\forall \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$.

(<u>Nota</u>: Se u minimizza $F(u)=\int_\Omega f(Du)\,dx$ allora è soluz. debole dell'eq. di Eulero $\int_\Omega \sum_i f_{\xi_i}(Du(x))D_i v=0$ $\forall$ funzione test v. Prendendo $v=D_s\varphi$ e integrando per parti si ha $\int_\Omega \sum_{ij} f_{\xi_i\xi_j}(Du(x))\,D_j(D_s u)\,D_i\varphi=0$ e quindi $D_s u$ è soluzione di un'eq. del tipo con $a_{ij}(x)=f_{\xi_i\xi_j}(Du(x))$. Se $f_{\xi_i\xi_j}$ sono limitate ed ellittiche, allora Du sono funzioni hölderiane !!)

Semicontinuità – compattezza (coercitività) – metodo diretto di Tonelli (teorema di Weierstrass)

Vogliamo ora introdurre la nozione di semicontinuità e coercitività, e descrivere il metodo diretto di Tonelli per l'esistenza di punti di minimo per problemi variazionali.

OSS. Si considera da ora in poi, in genere, $f: X \to]-\infty, +\infty]$ $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ per poter trattare problemi con vincolo: infatti, il problema $\min_{\substack{x \in K \\ K \subset X}} g$ con $g: X \to \mathbb{R}$, si traduce in un problema di minimo $\min_{x \in X} f$ con $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in K \\ +\infty & \text{se } x \in X \setminus K \end{cases}$. $\square$

Sia X uno spazio topologico. Per ogni $x \in X$ indichiamo con $\mathcal{N}(x)$ l'insieme di tutti gli intorni aperti di x in X.

s.c.i.

Def. 1. Sia $f: X \to]-\infty, +\infty]$ e sia $x_0 \in X$. Diremo che f è <u>semicontinua inferiormente in $x_0 \in X$</u> se $\forall\, t \in \mathbb{R}$ con $t < f(x_0)$, esiste $U \in \mathcal{N}(x_0)$ tale che $t < f(x)$ per ogni $x \in U$.

Diciamo che f è <u>semicontinua inferiormente in X</u> se f è semicontinua inferiormente in ogni punto di X.

OSS. • Per definizione $f: X \to]-\infty, +\infty]$ è s.c.i. se e solo se

$$f(x_0) \leq \sup_{U \in \mathcal{N}(x_0)} \inf_{x \in U} f(x) \quad (*) \qquad \left(= \liminf_{x \to x_0} f(x)\right)$$

•• Dalla definizione segue subito che, se F è semicontinua inferiormente in x_0 allora

$$f(x_0) \leq \liminf_{h \to +\infty} f(x_h)$$

per ogni successione $(u_h)_h$ convergente ad x_0 in X.

(*) Poiché $f(x_0) \geq \inf_{x \in U} f(x)$ $\forall\, U \in \mathcal{N}(x_0)$ si ha che f è s.c.i. in $x_0 \iff f(x_0) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x_0)} \inf_{x \in U} f(x)$.

Il viceversa è vero solo se X soddisfa il 1° assioma di numerabilità (*), ma è in generale falso.

<u>Proposizione</u>: Sia X spazio topologico soddisfacente il 1° assioma di numerabilità. Allora $f: X \to]-\infty, +\infty]$ è s.c.i. in x_0 se e solo se $f(x_0) \leq \liminf_{k \to +\infty} f(x_k)$ $\forall x_k \to x$ in X.

<u>Dim.</u> ($\Rightarrow$) già osservato sopra.

($\Leftarrow$) Proviamo per assurdo. Supp. che f non sia s.c.i. in x_0. Allora esiste $t \in \mathbb{R}$ con $t < f(x_0)$ tale che

$$(\square) \qquad \inf_{y \in U} f(y) < t$$

$\forall U \in \mathcal{N}(x_0)$. Sia (U_k) una base numerabile per il sistema di intorni di x_0 tale che $U_{k+1} \subseteq U_k$ $\forall k$. Da $(\square)$ segue che $\forall h \in \mathbb{N}$ $\exists x_k \in U_k$ t.c. $f(x_k) < t$. Allora (x_k) converge a x_0 in X e

$$\liminf_{k \to +\infty} f(x_k) \leq t < f(x_0)$$

che contraddice l'ipotesi. $\square$

Questa proposizione suggerisce allora di introdurre una definizione leggermente diversa di semicontinuità, che coincide con quella data prima se X soddisfa il 1° assioma di numerabilità (per esempio negli spazi metrici!).

(*) Esempi di spazi topologici che non soddisfano il 1° assioma di numerabilità sono gli spazi di Banach con la topologia debole (es. spazi L^p con la topologia debole). ↳ ∞ dim.

seq. s.c.i.

Def. 2 Sia $f : X \to]-\infty, +\infty]$ e sia $x_0 \in X$. Diremo che f è <u>sequenzialmente s.c.i. in x_0</u> se

$$f(x_0) \leq \liminf_{h \to +\infty} f(x_h)$$

per ogni successione (x_h) convergente a x_0 in X.

Diciamo che f è <u>seq. s.c.i. in X</u> se f è seq. s.c.i. in ogni punto di X.

È spesso utile la seguente

OSS. Sia $f : X \to]-\infty, +\infty]$. f è seq. s.c.i. in $x_0 \in X$ se si ha

$$f(x_0) \leq \lim_{h \to +\infty} f(x_h) \quad \text{per ogni succ. } (x_h) \text{ convergente a } x_0$$

$$\text{t.c. } \exists \text{ finito } \lim_{h \to +\infty} f(x_h).$$

<u>Dim.</u> Proviamo per assurdo.

Supponiamo che $\exists\, (x_h)$ con $x_h \to x_0$ e $f(x_0) > \liminf_{h \to +\infty} f(x_h)$

Passando al più ad una sottosuccessione (x_{h_k}) si ha

$f(x_0) > \liminf_{h \to +\infty} f(x_h) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{h_k}) \geq f(x_0)$. L'ultima disug. segue dall'ipotesi poiché $(x_{h_k}) \to x_0$ e $\lim_{k \to +\infty} f(x_{h_k}) < +\infty$, ottenendo così un assurdo. $\square$

Raccogliamo nelle seg. proposizioni qualche proprietà delle funzioni s.c.i.

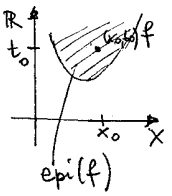
Prop. 1 Sia $f : X \to]-\infty, +\infty]$. Le proprietà seguenti sono equivalenti:

ⓐ f è s.c.i (risp. seq. s.c.i.) in X;

ⓑ $\forall\, t \in \mathbb{R}$, l'insieme $\{x \in X : f(x) > t\}$ è aperto (risp. seq. aperto (*)) in X;

ⓒ $\forall\, t \in \mathbb{R}$, l'insieme $\{x \in X : f(x) \leq t\}$ è chiuso (risp. seq. chiuso (**)) in X;

ⓓ $\mathrm{epi}(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}$ è chiuso (risp. seq. chiuso) in $X \times \mathbb{R}$.



(*) $A \subset X$ è <u>seq. aperto in X</u> se, $\forall\, x \in A$ e $\forall$ succ. $(x_h) \to x \in X$, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c. $x_h \in A$ $\forall\, h \geq k$.

(**) $K \subset X$ è <u>seq. chiuso in X</u> se $x \in K$ ogni qualvolta che esiste una succ. in K che converge a x in X.

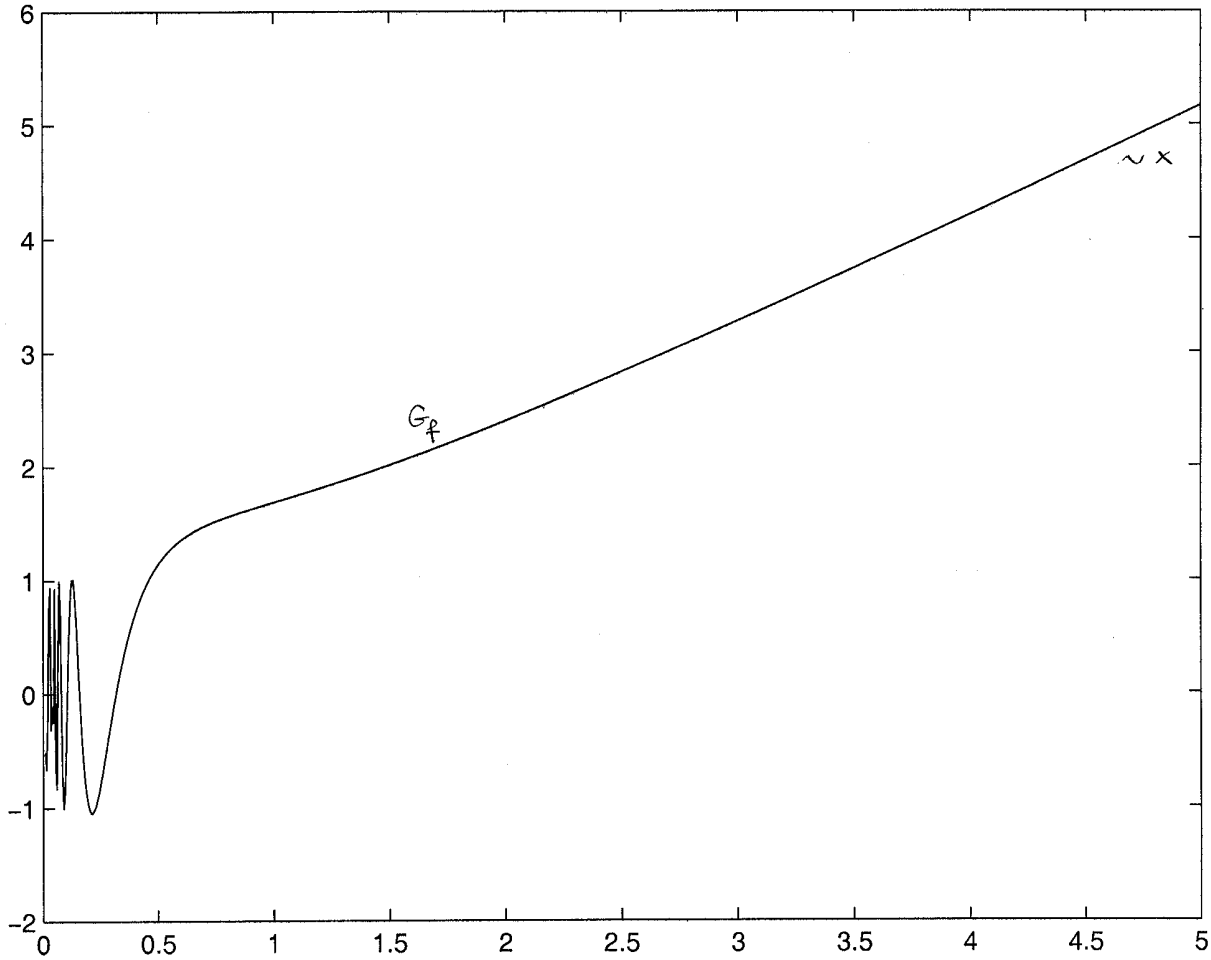
A è seq. aperto $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$ è seq. chiuso.

Es. X spazio topologico. Sia $A \subset X$ e sia $1_A : X \to \mathbb{R}$ la funzione caratteristica di A definita da $1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$. Allora 1_A è s.c.i. (seq. s.c.i.) $\Leftrightarrow$ A è aperto (seq. aperto).

Sia $\chi_A : X \to]-\infty, +\infty]$ la funzione indicatrice di A definita da $\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A \\ +\infty & \text{se } x \notin A \end{cases}$.

Allora χ_A è s.c.i. (seq. s.c.i.) $\Leftrightarrow$ A è chiuso (risp. seq. chiuso).

Es. Per $x \neq 0$ $\quad f(x) = (1+x^2)\sin\frac{1}{x}$ $\quad$ (grafico rappresentato solo per $x > 0$)



$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = 0 \\ f(x) & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

g è s.c.i. in $x = 0$.

Seguono subito le seg. proprietà per una famiglia di funzioni s.c.i.

Prop. 2. Sia $(f_i)_{i\in I}$ una famiglia di funzioni s.c.i. (nsp. seq. s.c.i.) in X. Allora

ⓐ $f(x) = \sup_{i\in I} f_i(x)$ è s.c.i. (nsp. seq. s.c.i.) in X.

ⓑ se I è finito, allora $g(x) = \inf_{i\in I} f_i(x)$ è s.c.i. (nsp. seq. s.c.i.) in X.

Prop. 3. Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ s.c.i. (nsp. seq. s.c.i.) in X. Allora $f+g$ è s.c.i. (nsp. seq. s.c.i.) in X.

Def. $E \subset X$ si dice <u>relativamente compatto</u> se $\bar{E}$ (= chiusura di E) è compatto.

$E \subset X$ si dice <u>seq. compatto</u> se ogni successione in E ha una sottosucc. che converge a un punto di E.

(si usa anche la dizione "coercitiva", e nsp. "seq. coercitiva")

Def. Diciamo che $f : X \to]-\infty, +\infty]$ è <u>coerciva</u> (nsp. <u>seq. coerciva</u>) in X se la chiusura degli insiemi dei sottolivelli di f definiti da

$$\{f \le t\} \doteq \{x \in X : f(x) \le t\}$$

è compatta (nsp. seq. compatta) per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni può essere riassunto nel seguente teorema

Teorema (Tonelli) (*) Sia X uno spazio topologico.
Sia $f : X \to]-\infty, +\infty]$ t.c.

(i) f è semicontinua in X (nsp. seq. s.c.i. in X),

(ii) f è coerciva (nsp. seq. coerciva) in X.

Allora esiste un punto di minimo di f in X, i.e. $\exists\, x_0 \in X$ t.c.

$$f(x_0) = \inf_X f .$$

(*) "Weierstrass generalizzato".

Dim. (a) Parte "topologica":

Poniamo $I = \inf_X f \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Se $I = +\infty$, ogni pt. $x \in X$ è un pt. di minimo per f.

Se $I < +\infty$. Consideriamo una succ. decrescente $(t_h)_h$ t.c.

$$t_h \downarrow I \qquad \left(\text{per esempio } t_h = I + \tfrac{1}{h}\right)$$

e consideriamo $\{x \in X : f(x) \leq t_h\}$.

Essendo per ipotesi f s.c.i. su X, per la Prop. 1 (c) (pag. 145) si ha che $\{x \in X : f(x) \leq t_h\}$ è chiuso in X, $\forall h \in \mathbb{N}$.

Essendo f coerciva, risulta allora che $\{x \in X : f(x) \leq t_h\}$ è compatto; inoltre è non vuoto per la def. di inf. Inoltre è una succ. di insiemi decrescenti. Allora

$$\bigcap_h \{x \in X : f(x) \leq t_h\} \neq \emptyset .$$

Dunque $\exists\, x_0 \in X$ t.c. $x_0 \in \bigcap_h \{x \in X : f(x) \leq t_h\}$, e quindi

$$f(x_0) \leq t_h \qquad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Passando al limite per $h \to +\infty$ segue $f(x_0) \leq I$. Quindi $x_0 \in X$ è un pt. di minimo di f su X. $\square$

(b) Parte "sequenziale":

Poniamo $I = \inf_X f \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Se $I = +\infty$, ogni pt. $x \in X$ è un pt. di minimo per f.

Se $I < +\infty$, allora esiste (succ. minimizzante) $(x_h) \subset X$ tale che $\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = I$.

In particolare risulta che $(f(x_n))_n$ è limitata superiormente ($(f(x_n))$ è convergente, o, al più, divergente a $-\infty$), cioè $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$+\infty > I = \inf_X f$: allora $\exists\, x_h \in X$ t.c. $\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_X f$ [$(x_h)_h$ si dice succ. minimizzante]

Infatti, per def. di inf, $\forall h \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_h \in X$ t.c. $f(x_h) < \inf_X f + \frac{1}{h}$. D'altra parte $\inf_X f < f(x_h)$ $\forall h \in \mathbb{N}$ e quindi $\lim_{h \to +\infty} f(x_h) = \inf_X f$. $\square$

$$f(x_h) \leq \lambda \qquad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Poichè f è seq. coerciva, la succ. $(x_h)_h$ ammette allora una sottosucc. $(x_{h_k})_k$ convergente ad un elemento $x_0 \in X$ con

$$f(x_0) \leq \lambda.$$

Dalla seq. s.c.i. di f si ha

$$f(x_0) \leq \liminf_{k \to +\infty} f(x_{h_k}) = \lim_{h \to +\infty} f(x_h) = I,$$

e quindi x_0 è un punto di minimo per f su X. $\square$

OSS 1. Se $f \geq g$ con g coercitiva (seq. coercitiva) in X, allora f lo è. ⊛

OSS 2. Per la validità della parte "sequenziale" del teorema, basta che in X sia definita una convergenza sequenziale, non derivante da una topologia su X. Ovviamente, la compattezza seq. e la semicontinuità inferiore seq. andranno definite a partire da questa convergenza.

Diamo infine un teorema di unicità del minimo. Per questo scopo estendiamo il concetto di stretta convessità (vedi pag. 66) anche per funzioni che posso assumere il valore $+\infty$.

Def. Sia X uno spazio vettoriale, $f: X \to]-\infty, +\infty]$. f si dice strettamente convessa se $\forall x \neq y \in X$ con $f(x), f(y) < +\infty$, $\forall \lambda \in]0,1[$ si ha

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Prop. Sia X uno spazio vettoriale, $f: X \to]-\infty, +\infty]$ strettamente convessa e $I = \inf_X f < +\infty$.

Allora esiste al più un punto di minimo per f su X.

Dim. (vedi dim. Teor. 2 pag. 40 e pag. 42) L'ipotesi $I < +\infty$ esclude che $f \equiv +\infty$, e quindi il caso in cui tutti i punti di X sono pt. di minimo per f.

⊛ Quindi spesso si usano "funzioni di confronto" che siano coercitive.

Supponiamo ora per assurdo che $\exists$ono $x_1 \neq x_2 \in X$ pt. di minimo per f, ossia

$$f(x_1) = f(x_2) = \inf_X f < +\infty .$$

Per $\lambda = \frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$ si ha per la stretta convessità di f

$$f(x) < \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2) = I$$

e questo è assurdo. $\square$

Tentativi di applicazione

Vogliamo ora cercare di applicare il teorema di Tonelli (e il risultato di unicità) per ottenere teoremi di esistenza (e di unicità) del minimo per funzionali del tipo

$$F(u) = \int_a^b f(u)\,dx \qquad u : [a,b] \to \mathbb{R}$$

e

$$F(u) = \int_a^b f(u')\,dx \qquad u : [a,b] \to \mathbb{R} .$$

Concluderemo poi con un teorema di semicontinuità inferiore (e di esistenza) di Tonelli per funzionali del tipo

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\,dx , \qquad u : [a,b] \to \mathbb{R} .$$

Discuteremo infine l'esempio di Weierstrass $\left(F(u) = \int_{-1}^{1} x^2 u'^2\,dx , \right.$ $\left. u \in X = \{ u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = -1,\ u(1) = 1 \} \right)$ già incontrato a pag. 20 e pag. 47.

<u>Es. 1</u> Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_0^1 (u(x))^2 dx - 2\int_0^1 g(x)u(x)dx, \qquad g \in L^2(0,1)$$

È naturale scegliere $X = L^2(0,1)$ come spazio su cui ambientare il problema variazionale

$$\inf_{u \in L^2(0,1)} F(u)$$

(nota: su $L^2(0,1)$ risulta $F(u) < +\infty$).

Si vede subito che la funzione $u = g$ è soluzione del problema di minimo.

Infatti

$$F(u) = \int_0^1 u^2 dx - 2\int_0^1 g u\, dx = \int_0^1 \left[(u(x) - g(x))^2 - g^2(x)\right] dx \geq F(g)$$

e $= F(g)$ se e solo se $(u(x) - g(x))^2 = 0$ per q.o. $x \in]0,1[$

ossia $u = g$ q.o. su $]0,1[$.

Inoltre essendo F strett. convesso su $L^2(0,1)$, tale minimo è unico.

vedi [B] Cap. IV
[D] Cap. 1, §1.3

<u>Definizione e proprietà elementari degli spazi $L^p(\Omega)$</u>, Ω aperto di $\mathbb{R}^n$ dotato della misura di Lebesgue.

<u>Def.</u> Sia $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$. Diremo che una funzione misurabile $u : \Omega \to \mathbb{R}$ appartiene a $L^p(\Omega)$ se

$$\|u\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{1/p} & \text{se } 1 \leq p < +\infty \\ \inf\{c : |u(x)| \leq c \text{ quasi ovunque in } \Omega\} & \text{se } p = +\infty \end{cases}$$

↳ o semplicemente L^p

è finito. Si verifica che $\|\cdot\|_{L^p}$, $\forall\, 1 \leq p \leq +\infty$ è una norma.

$L^p(\Omega)$ è quozientato rispetto alla relazione di equivalenza: $u \sim v \iff u(x) = v(x)$ per q.o. $x \in \Omega$.

<u>Teorema 1</u>: Sia $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$. Allora

i) (<u>disug. di Hölder</u>): Se $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora $uv \in L^1(\Omega)$ e $\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$.

ii) $(L^p(\Omega), \|\ \|_{L^p})$ è uno spazio di Banach. Lo spazio $L^2(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare dato da $\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx$. In questo caso, la disug. di Hölder $(p=2, q=2)$ non è altro che la <u>disuguaglianza di Cauchy-Schwarz</u>: $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}$ ([B] Cap. V).

iii) (<u>teorema di rappresentazione di Riesz</u>): Lo spazio duale di L^p, cioè $(L^p)'$ ⊛, può essere identificato con $L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ se $1 \leq p < +\infty$. Il risultato è falso per $p = +\infty$. Il teorema va inteso nel seg. modo: Se $\varphi \in (L^p)'$, $1 \leq p < +\infty$, allora $\exists!\, u \in L^q$ t.c. $\langle \varphi, f\rangle = \int_\Omega u f dx$ $\forall f \in L^p$; inoltre $\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$.

<u>NOTA</u>: Quest'ultimo risultato ci permette di fare l'identificazione $(L^p)' = L^q$, $\forall\, 1 \leq p < +\infty$.

⊛ L'insieme dei funzionali lineari e continui $\varphi : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Vogliamo ora però ignorare questo risultato e cercare di dimostrare l'esistenza del minimo usando il metodo diretto (ossia il teorema di Tonelli pag. 147).

<u>1° tentativo</u>: consideriamo $X = L^2(0,1)$ con la convergenza forte.

- Risulta allora subito che F è continuo (e non solo seq. s.c.i.).

Infatti, se $u_n \to u$ in $L^2(0,1)$, allora si ha (vedi Teorema 1i) fondo pag. 153) ⊛'

$$\int_0^1 u_n^2\,dx = \|u_n\|^2_{L^2} \longrightarrow \|u\|^2_{L^2} = \int_0^1 u^2\,dx$$

mentre, per la disug. di Cauchy-Schwarz (vedi Teor. 1 ii) fondo pag. 151)

$$\left|\int_0^1 g(x)u_n(x)\,dx - \int_0^1 g(x)u(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 g(x)(u_n-u)\,dx\right| = |\langle g, u_n-u\rangle| \le$$

$$\le \|g\|_{L^2}\|u_n-u\|_{L^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

e quindi $F(u_n) \to F(u)$ se $u_n \to u$ in $L^2(0,1)$.

---

vedi [B] Cap. IV. [D] Cap. 1, §1.3

<u>Teorema 1</u>: L^p è separabile se $1 \le p < +\infty$ e riflessivo (cioè il bidurale di L^p, $(L^p)''$, può essere identificato con L^p) se $1 < p < +\infty$ ⊛.

Rivolgiamo ora la ns. attenzione alle <u>nozioni di convergenza negli spazi L^p</u>. La nozione naturale, detta la <u>convergenza forte</u>, e quella indotta dalla norma $\|\cdot\|_{L^p}$. Per i ns. scopi ci serve una nozione di convergenza più debole nota come <u>convergenza debole</u> (è quella data dalla topologia debole e si scrive come di seguito grazie al teorema di rappresentazione di Riesz).

<u>Def.</u> Sia $p \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le +\infty$. Allora

i) Una successione $(u_n)_n \subset L^p(\Omega)$ <u>converge (forte)</u> ad $u \in L^p$ se $\|u_n - u\|_{L^p} \xrightarrow[n]{} 0$ (notazione: $u_n \to u$ in L^p).

ii) $1 \le p < +\infty$, $(u_n) \subset L^p$ <u>converge debole</u> a $u \in L^p$ se $\int_\Omega u_n \varphi\,dx \longrightarrow \int_\Omega u\varphi\,dx \;\forall \varphi \in L^q$ (notazione: $u_n \rightharpoonup u$ in L^p)

<u>NOTA</u>: Il limite (debole o forte) è unico. Ovviamente $(u_n \to u \text{ in } L^p) \Rightarrow (u_n \rightharpoonup u \text{ in } L^p)$.
Il viceversa è falso!! È conseguenza del teorema di Riemann-Lebesgue (vedi [D] Thm. 1.22)

<u>Es.</u> (vedi [D] Es. 1.18 pag. 19) Sia $\Omega =]0, 2\pi[$ e sia $u_n(x) = \sin nx$. Allora
$\sin nx \not\to 0$ in L^p $\forall\, 1 \le p \le \infty$,
$\sin nx \rightharpoonup 0$ in L^p $\forall\, 1 \le p < +\infty$.

⊛ Questo fatto è molto importante nell'ambito del calcolo delle variazioni (in spazi di Banach riflessivi E la palla $B_E = \{x \in E : \|x\| \le 1\}$ è compatta per la topologia debole su E (vedi Teorema 1 iii) a fondo pag. 153).

⊛' questo fatto segue immediatamente dalla disug. triangolare (disug. di Minkowski) della norma in generale.

•• Cerchiamo di indagare la seq. coercitività di F. Sia $t \in \mathbb{R}$ e $(u_h) \subset X$ t.c. $F(u_h) \le t$. Ci chiediamo se possiamo estrarre una succ. convergente in norma ad una funzione $u \in L^2(0,1)$ e $F(u) \le t$.

Consideriamo $u_h(x) = \operatorname{sen}(2\pi h x)$ e si ha $\int_0^1 u_h^2\,dx = \int_0^1 \operatorname{sen}^2(2\pi h x)\,dx = \frac{1}{2}$

e per Cauchy-Schwarz $\left|\int_0^1 g(x) u_h(x)\,dx\right| \le \|u_h\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \le \|g\|_{L^2}$.

Allora tale succ. (u_h) soddisfa $F(u_h) \le t$ per qualunque $t \ge \frac{1}{2} + 2\|g\|_{L^2}$.

Proviamo che tale succ. (u_h) non ammette sottosucc. convergente nella norma di $L^2(0,1)$. Infatti, per assurdo, sia $u_{h_k} \to v$ in L^2.

Allora
$$\langle u_{h_k}, \varphi \rangle \to \langle v, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in L^2(0,1) \qquad \text{(converg. debole)}.$$

D'altra parte, per il lemma di Riemann-Lebesgue (vedi [D], Thm. 1.22)
$$\langle u_{h_k}, \varphi \rangle = \int_0^1 \varphi(x) \operatorname{sen} 2\pi h_k x\,dx \to \int_0^1 \varphi(x)\,\bar{u}(x)\,dx = 0$$
dove $\bar{u}(x) = \int_0^1 \operatorname{sen} 2\pi x\,dx = 0$

e quindi, prendendo in particolare $\varphi = v$ si ha $\langle v, v \rangle = 0$. Da questo, poiché $u_{h_k} \to v$ in norma L^2 si ottiene $\frac{1}{2} = \langle u_{h_k}, u_{h_k} \rangle \to \langle v, v \rangle = 0$. Assurdo! Quindi F non è seq. coercitiva rispetto alla convergenza in norma L^2.

<u>2° tentativo</u>: Consideriamo allora $X = L^2(0,1)$ dotato della convergenza debole.

Poiché $F(u) = \int_0^1 (u^2 - 2gu)\,dx \ge \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2} - 2\|g\|^2_{L^2}$ (basta osservare che $\left|2\int_0^1 g u\,dx\right| \le 2\|g\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \le \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2} + 2\|g\|^2_{L^2}$ poiché $2ab \le \frac{1}{2}a^2 + 2b^2$)

e $G(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2} - 2\|g\|^2_{L^2}$ è seq. compatta per la top. debole, si ha che F è seq. coercitivo per la converg. deb. (*) Chiaramente non possiamo aspettarci che

vedi [B] Cap. IV, [D] Cap. 1 §1.3

Teorema 1. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto e limitato. Allora si ha

continuità della norma — i) se $u_h \to u$ in $L^p(\Omega)$, allora $\|u_h\|_{L^p} \to \|u\|_{L^p}$ $\quad 1 \le p \le +\infty$

s.c.i. della norma — ii) se $1 \le p < +\infty$ e se $u_h \to u$ in $L^p(\Omega)$, allora $\exists\, c > 0$ t.c. $\|u_h\|_{L^p} \le c$; inoltre $\|u\|_{L^p} \le \liminf_{h \to +\infty} \|u_h\|_{L^p}$.

compattezza debole — iii) se $1 < p < +\infty$ e se $\exists\, c > 0$ t.c. $\|u_h\|_{L^p} \le c$, allora $\exists\, (u_{h_k})_k$ e $u \in L^p(\Omega)$ t.c. $u_{h_k} \xrightarrow[k]{} u$ in L^p.

iv) Sia $1 \le p \le \infty$ e $u_h \to u$ in L^p; allora $\exists\, (u_{h_k})_k$ e $g \in L^p(\Omega)$ t.c. $u_{h_k} \to u$ q.o. su Ω e $|u_{h_k}(x)| \le g(x)$ $\forall k$ e per q.o. $x \in \Omega$.

(*) Vedi OSS. 1 pag. 149

F risulti ancora continuo, ma ci basta la seq. s.c.i. rispetto alla convergenza debole. Osserviamo subito che (vedi Teorema 1 ii) fondo pag. 153)

$$u_h \rightharpoonup u \text{ in } L^2 \quad \Rightarrow \quad \|u\|_{L^2} \leq \liminf_{h\to+\infty} \|u_h\|_{L^2} \ (*) .$$

D'altra parte

$$\int_0^1 g(x)\, u_h(x)\,dx = \langle g, u_h\rangle \longrightarrow \langle g, u\rangle = \int_0^1 g(x)u(x)\,dx$$

quindi, per ogni $(u_h) \subset L^2$ con $u_h \rightharpoonup u$ in $L^2(0,1)$ si ha

$$\liminf F(u_h) = \liminf_h \left(\int_0^1 u_h^2\,dx - 2\int_0^1 g(x)u_h(x)\,dx\right) \geq$$

$$\geq \liminf_h \left(\int_0^1 u_h^2\,dx\right) - 2\lim_{h\to+\infty} \int_0^1 g(x)u_h(x)\,dx \geq \int_0^1 u^2\,dx - 2\int_0^1 g u\,dx = F(u),$$

provando così la seq. s.c.i. rispetto alla convergenza debole del funzionale F.

Possiamo allora applicare la versione seq. del teorema di Tonelli che ci garantisce l'esistenza di un punto di minimo per F su $L^2(0,1)$. $\square$

<u>NOTA</u>: Se si vuole ora considerare un funzionale (tipo corda elastica vedi pag. 49) della forma

$$F(u) = \int_{-1}^{1} \left[\frac{k}{2}\left(u'(x)\right)^2 + g\,u(x)\right] dx$$

con $u : [-1,1] \to \mathbb{R}$ soddisfacente la condizione di Dirichlet al bordo $(u(-1) = u(1)) = 0)$, $g =$ costante, oppure (vedi pag. 64)

(*) questo fatto segue facilmente dalla disug. di Cauchy-Schwarz: Sia $u_h \rightharpoonup u$ in L^2. Poiché $|\langle u_h, u\rangle| \leq \|u_h\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$ e passando al limite si ha $|\langle u, u\rangle| \leq \|u\|_{L^2} \liminf \|u_h\|_{L^2}$ ossia $\|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2} \liminf_{n\to+\infty} \|u_h\|_{L^2}$; dividendo per $\|u\|_{L^2} \neq 0$ si ha $\|u\|_{L^2} \leq \liminf_{h\to+\infty} \|u_h\|_{L^2}$ che d'altra parte vale anche per $u = 0$ q.o. $\square$