$$F(u) = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} (u'(x))^2 + g(x)\, u(x) \right] dx$$

con $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ soddisfacente la condizione di Dirichlet al bordo $(u(0) = u(1) = 0)$, $g \in L^2(0,1)$, come spazio X su cui ambientare il problema di minimo è abbastanza naturale considerare

$$X = \{ u \in L^2(a,b) : u \text{ derivabile in }]a,b[\text{, continua in } a \text{ e } b,\ u(a) = u(b) = 0,\ u' \in L^2(a,b) \}$$

↳ basta derivabile q.o.

su cui i funzionali sono ben definiti.

Vediamo in seguito che anche in questo caso possiamo fare considerazioni analoghe a quelle fatte nell'esempio 1, ma il problema si fa più complesso.

Cerchiamo di costruirci un opportuno spazio di funzioni con un'opportuna convergenza sequenziale da garantire sia la seq. s.c.i. del funzionale che la seq. coercitività.

<u>Es. 2</u> Cerchiamo di motivare l'uso delle classe delle funzioni assolutamente continue (introdotte da Vitali e Tonelli) e degli spazi di Sobolev mediante il semplice esempio del funzionale della corda elastica. Ad un tale funzionale F può essere <u>applicato il ragionamento del metodo diretto</u> (*) <u>per risolvere il pbm. di minimo</u>

$$\inf_{u \in X} F(u) \qquad F(u) = \int_a^b \left[(u'(x))^2 + g(x) u(x) \right] dx$$

$$g \in L^2(0,1)$$

$$X = \{ u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = u(b) = 0 \},$$

purché si riesca ad individuare una successione minimizzante <u>convergente</u>, e a provare un <u>risultato di s.c.i.</u> del funzionale F per il tipo di conver=

(*) cioè cerchiamo di percorrere la dim. del teorema di Tonelli per F su X.

genera per cui si ha l'esistenza di succ. minimizzanti.

Questo approccio ci permetterà allora di individuare lo spazio X "naturale" sul quale considerare il funzionale F (e il pbm. variazionale associato) e la convergenza sequenziale da mettere su X.

Premettiamo il seguente semplice risultato, conseguenza immediata del teorema fondamentale del calcolo integrale e dalla disug. di Hölder (vedi Teorema 1 i), pag. 151).

<u>Lemma 1</u> Se $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$, allora

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq |x_2 - x_1|^{1/2} \, \|u'\|_{L^2}$$

$\forall\, x_1, x_2 \in [a,b]$. $\square$

Oss. che $\inf_X F \leq F(0) = 0 < +\infty$.

Sia $(u_h) \subset X$ una successione minimizzante, i.e. $\lim_{h\to\infty} F(u_h) = \inf_X F(u)$.

In particolare, $(F(u_h))_h$ è limitata superiormente, per cui esiste $M > 0$ tale che $F(u_h) \leq M \;\; \forall h \in \mathbb{N}$.

D'altra parte, dal lemma 1 applicato ad u_h si ottiene $(u_h(a) = 0 \;\forall h)$

$$|u_h(x)| \leq (b-a)^{1/2} \, \|u_h'\|_{L^2}$$

e quindi

$$(1) \qquad \|u_h\|_{L^2} \leq c \, \|u_h'\|_{L^2} \qquad (c = (b-a)).$$

Quindi, applicando la disug. di Cauchy-Schwarz

$$M \geq F(u_h) \geq \|u_h'\|_{L^2}^2 - \|g\|_{L^2} \|u_h\|_{L^2}$$

$$\underset{(1)}{\geq} \|u_h'\|_{L^2}^2 - c\,\|g\|_{L^2} \|u_h'\|_{L^2} \geq \frac{1}{2}\|u_h'\|_{L^2}^2 - \beta$$

per un opportuno valore β (infatti $t^2 - \alpha t \geq \frac{t^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2}$). Allora

$|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$

$$\boxed{(u_h') \text{ è limitata nella norma } L^2(a,b) .}$$

Allora esiste una sottosuccessione (che, per semplicità, non rinominiamo) (vedi Teorema 1 iii) a fondo pag. 153) tale che

$$\boxed{u_h' \longrightarrow v \quad \text{in } L^2(a,b)}$$

per una opportuna $v \in L^2(a,b)$. Inoltre per il lemma 1, la successione (u_h) è <u>equicontinua</u> e <u>equilimitata</u>. Possiamo allora applicare il teorema di Ascoli-Arzelà (vedi Teorema a fondo pag. 141): esiste allora una sottosuccessione (che indicheremo sempre con u_h) convergente uniformemente ad una funzione continua u su $[a,b]$:

$$\boxed{u_h \longrightarrow u \quad \text{in } \mathcal{C}^0([a,b]).}$$

Notiamo allora che la convergenza puntuale delle funzioni u_h e la convergenza debole in $L^2(a,b)$ di u_h', passando al limite nell'uguaglianza

$$u_h(x) - u_h(y) = \int_y^x u_h'(t)\,dt \qquad \forall x, y \in [a,b]$$

forniscono la relazione

$$(2) \qquad \boxed{u(x) - u(y) = \int_y^x v(t)\,dt}$$

fra u (limite uniforme delle u_h) e v (limite debole in L^2 delle u_h').

<u>Se sapessimo</u> che u è di classe $\mathcal{C}^1$, allora concluderemmo $v = u'$;

Inoltre, dalla disuguaglianza

$$(3) \qquad a^2 - b^2 \geq 2b(a-b),$$

otteniamo:

$$\int_a^b (u_h'(x))^2\,dx - \int_a^b (u'(x))^2\,dx \geq 2\int_a^b u'(x)\,(u_h'(x) - u'(x))\,dx,$$

da cui, passando al limite (il secondo membro tende a 0 per la convergenza debole di (u_h')) si ha

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_a^b (u_h'(x))^2\,dx \geq \int_a^b (u'(x))^2\,dx\,;$$

Poiché per la convergenza uniforme

$$\lim_{h\to+\infty} \int_a^b g(x)\,u_h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,u(x)\,dx\,,$$

si avrebbe infine

$$F(u) \leq \liminf_{h\to+\infty} F(u_h)\,.$$

In queste condizioni potremmo concludere che u è un punto di minimo per F in X.

Poiché in realtà u non è necessariamente $\mathcal{C}^1$, <u>assumiamo la (2)</u>, che non è altro che la validità del teorema fondamentale del calcolo integrale, <u>come nozione generalizzata di derivabilità per la funzione u</u>, con derivata v. Più precisamente

"$AC([a,b])$ è l'insieme delle funzioni che sono primitive di funzioni L^1."

<u>Def 1.</u> Diciamo che una funzione $u \in L^1(a,b)$ ⊛ è <u>assolutamente continua</u> se esiste $v \in L^1(a,b)$ tale che vale la relazione

$$u(x) - u(y) = \int_x^y v(t)\,dt$$

$\forall\, x,y \in [a,b]$. L'insieme delle funzioni assolutamente continue su $[a,b]$ viene indicato con $AC([a,b])$.

<u>NOTA</u> (A) (vedi [BGH] Chap. 2, § 2.2) La funzione v, che nel caso in cui u sia regolare coincide con la derivata classica di u, verrà ancora denotata con u'. Si può dimostrare (usando il teorema di derivazione

⊛ $L^2(a,b) \subset L^1(a,b)$: infatti $\int_a^b |u|\,dx \leq (b-a)^{1/2}\left(\int_a^b u^2\,dx\right)^{1/2}$; segue dalla disug. di Hölder con $r=1$ e $p=q=2$.

di Lebesgue (*) che se $u \in AC([a,b])$, allora u è derivabile q.o. in senso classico con derivata v.

Infatti, $\forall\, x, y \in [a,b]$ abbiamo

$$u(x) - u(y) = \int_y^x v(t)\,dt.$$

Allora $$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} v(t)\,dt \qquad \forall\, h$$

Dal teorema di derivazione di Lebesgue da questo si ottiene che, per q.o. $x \in [a,b]$, $u(x)$ è derivabile in senso classico, i.e. $$\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = [u'(x)] \leftarrow \text{notazione}$$

esiste q.o. in $[a,b]$, e $[u'(x)] = v(x)$ per q.o. $x \in [a,b]$.

→ Useremo spesso in seguito semplicemente la notazione u' per indicare $[u'(x)]$ e anche v. $\square$

Osserviamo che se $u \in AC([a,b])$, allora u è sicuramente continua, anzi, uniformemente continua per l'assoluta continuità dell'integrale.

(Teorema (assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue): Sia $f \in L^1(\Omega)$. Allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ t.c. per ogni insieme misurabile $A \subset \Omega$ con $|A| < \delta$ si ha $\int_A |f(x)|\,dx < \varepsilon$).

(B) Osserviamo che la definizione classica (nel senso di Vitali, e poi Tonelli) di funzione assolutamente continua non è legata ad un concetto di "derivata".

(*) Teorema di derivazione di Lebesgue: Sia $f \in L^1(\Omega)$. Allora per q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\,dy = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} f(y)\,dy = f(x),$$

dove $|B_r(x)|$ = misura di Lebesgue della palla di centro x e raggio r.

<u>Def. 2</u>. Una funzione $u: [a,b] \to \mathbb{R}$ è detta <u>assolutamente continua</u> se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che per ogni famiglia finita di intervalli aperti $]a_1,b_1[,]a_2,b_2[, \dots,]a_n,b_n[$, e a due a due disgiunti, di $[a,b]$ si ha

$$\textcircled{\square} \qquad \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon .$$

- segue da questa definizione che ogni funz. $AC([a,b])$, nel senso di Def. 2, è uniformemente continua in $[a,b]$.
- Ovviamente ogni funzione lipschitziana su $[a,b]$ soddisfa Def. 2. Infatti, se $|u(x) - u(y)| \le k|x-y|$ $\forall x,y \in [a,b]$, allora $\textcircled{\square}$ è soddisfatta con $\delta = \varepsilon/k$.
- ogni funzione $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$ soddisfa Def. 2 (questo fatto è il TFC (teor. fond. calcolo integrale) per la def. 1), poiché $u \in \mathcal{C}^1([a,b])$ è lipschitziana.
- Segue che il prodotto di due funzioni assolut. continue è ancora una funzione assolut. continua.

<u>Teorema 1</u>: Sia u soddisf. Def. 2. Allora $\exists u'$ (nel senso classico) q.o. su $[a,b]$, $u' \in L^1(a,b)$ t.c. $u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)\,dt$ $\forall x,y \in [a,b]$

<u>Dim.</u> Si basa sul teorema di derivazione di Lebesgue. $\square$

<u>Teorema 2</u>: Sia u soddisfa Def. 1. Sia $v \in L^1(a,b)$ e $u(x) = u(a) + \int_a^x v(t)\,dt$. Allora u soddisfa Def. 2 e $u'(x) = v(x)$ q.o. su $[a,b]$.

<u>Dim.</u> Si basa sull'assoluta continuità dell'integrale (per la prima parte). L'altro fatto, come già notato, segue dal teorema di derivazione di Lebesgue. $\square$

<u>OSS.</u> $\exists u \in \mathcal{C}^0([a,b])$ con u' $\exists$ q.o. su $[a,b]$, $u' \in L^1(a,b)$, ma $u \notin AC([a,b])$
(funzione Cantor-Vitali [BGH Es. 2 pag. 81])
Vedi anche [Rudin], Real & Complex Analysis, pag. 144.

Ritorniamo al nostro pbm. variazionale:

Nel contesto del nostro problema di minimo siamo interessati alle funzioni con derivate prime in L^2. Pertanto è naturale introdurre i seguenti spazi funzionali

$$H^1(a,b) = \{u \in AC([a,b]) : u' \in L^2(a,b)\}$$

(↳ la derivata dalla def. 1 pag. 158)

$$H^1_0(a,b) = \{u \in H^1(a,b) : u(a) = u(b) = 0\}.$$

Lo spazio $H^1_0(a,b)$ appare come la naturale estensione dell'insieme X in cui avevamo inizialmente considerato il funzionale F.

Inoltre è naturale considerare la seg. nozione di convergenza: una successione di funzioni $(u_h) \subset H^1_0(a,b)$ converge ad u se

$$u_h \longrightarrow u \quad \text{uniformemente su } [a,b]$$
$$u_h' \longrightarrow u' \quad \text{debole in } L^2(a,b)),$$

dove u' è la derivata di u, i.e. la funzione $v \in L^2(0,1)$ soddisfacente (2).

Se $F(u) = \int_a^b \left[(u'(x))^2 dx + g(x)u(x)\right] dx$, su $H^1_0(a,b)$, potendo svolgere esattamente gli stessi ragionamenti precedenti ⊛ (vale ancora Lemma 1 e tutto il resto procede analog.) si ha il seg. risultato.

<u>Teorema</u>: Sia $F(u) = \int_a^b \left[(u'(x))^2 + g(x)u(x)\right] dx$ definito su $H^1_0(a,b)$, con $g \in L^2(a,b)$. Allora il problema di minimo

$$\inf_{u \in H^1_0(a,b)} F(u)$$

ha soluzione (essa è unica per la stretta convessità di F)

⊛ si ha in questo caso seq. coercitività di F e seq. s.c.i. di F (si procede come nel caso regolare)

<u>OSS.</u> Ripercorriamo brevemente il ragionamento seguito (da seguire!) per la dim. del teorema precedente:

i) Abbiamo individuato una classe X $\left(= H_0^1(a,b)\right)$ di funzioni ammissibili e introdotto una nozione di convergenza opportuna su X che denoteremo con $u_n \to u$.

ii) Risulta che F è ben definito su X e limitato dal basso, così che $\inf_X F$ è finito. Si considera una successione minimizzante in X, i.e. una succ. di funzioni $u_n \in X$ t.c. $F(u_n) \to \inf_X F$.

iii) Si dimostra che F è seq. semicontinua inferiormente in X rispetto alla convergenza scelta in i), i.e. $\forall\, u_n \to u$ si ha

$$F(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} F(u_n) .$$

iv) Si dimostra che la successione minimizzante contiene una sottosucc. convergente con una funzione limite in X.

Notiamo che in iv) si prova un risultato di seq. compattezza in X solo per una succ. minimizzante (non abbiamo provato che tutti i sottolivelli di F sono seq. compatti), ma questo è quanto basta per concludere l'esistenza di un pt. di minimo u_0 per F in X.

Inoltre abbiamo invertito nella dimostrazione i pt. iii) e iv).

I ragionamenti che hanno portato al teorema a pag. 161 possono essere estesi a classi di funzionali più ampie. Una prima estensione dà il seguente

<u>Teorema</u>: Sia $F(u) = \int_a^b f(u')\,dx + \int_a^b g(x)u(x)\,dx$ definito su $H_0^1(a,b)$, con $g \in L^2(a,b)$ e con

i) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ funzione convessa;

ii) (coercitività) esistono $c, C > 0$ per le quali

$$c\,\xi^2 \le f(\xi) \le C(1+\xi^2). \quad (*)$$

Allora il problema di minimo $\inf_{u \in H_0^1(a,b)} F(u)$ ha soluzione.

<u>Dim.</u> La coercitività assicura l'equilimitatezza in L^2 delle derivate delle succ. minimizzanti; questo, come nel caso precedente, garantisce (a meno di passare ad una sottosucc.) la converg. debole in L^2 delle derivate e la equilimitatezza ed equicontinuità delle funzioni stesse (e quindi la converg. uniforme delle funzioni).

Invece, la convessità permette di dim. la disug. di seq. semicontinuità inferiore: (rispetto la converg. consid. su $H_0^1(a,b)$). Infatti, su $]a,b[$ risulta

$$f(u_h') \ge f(u') + f'(u')(u_h' - u')$$

(nel caso $f(\xi) = \xi^2$ si trova la disug. (3) a pag. 157); la condizione di crescita di f implica che $\exists\, C' > 0$ tale che

$$|f'(\xi)| \le C'(1+|\xi|);$$

quindi $f'(u') \in L^2(a,b)$. Allora, poiché $u_h' \longrightarrow u'$ in L^2, abbiamo

$$\int_a^b f'(u')(u_h' - u')\,dx \longrightarrow 0 \quad \text{per } h \to +\infty.$$

Ne segue che:

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_a^b f(u_h')\,dx \ge \int_a^b f(u')\,dx + \liminf_{h\to+\infty} \int_a^b f'(u')(u_h' - u')\,dx = \int_a^b f(u')\,dx.$$

Poiché $\int_a^b g(x)u_h(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b g(x)u(x)\,dx$ si ha infine $\liminf_{h\to+\infty} F(u_h) \ge F(u)$.

$\square$

(*) La stima dall'alto l'abbiamo usata solo per avere una dim. più rapida per la seq.s.c.i. avendo $|f'(\xi)| \le C(1+|\xi|)$.

<u>OSS.1</u> Riguardo lo studio delle proprietà degli elementi di $H^1(a,b)$ ci limitiamo ad osservare che

$$H^1(a,b) \subseteq \mathcal{C}^{0,\frac{1}{2}}(a,b)$$

(infatti il lemma 1, pag. 156 vale anche per le funz. di $H^1(a,b)$); notiamo però che non tutte le funzioni hölderiane di esponente $\frac{1}{2}$ sono in H^1: basta considerare la funzione $u(x)=\sqrt{x}$ su $(0,1)$, la cui derivata prima non è a quadrato integrabile.

per quanto già detto, risulta allora che le funzioni $W^{1,1}$ (in una variabile!!) assomigliano molto alle funzioni $\mathcal{C}^1$ perché sono continue (a meno di modificarle su un insieme di misura nulla) e sono primitive della loro derivata debole!

<u>OSS.2</u> Per completezza vogliamo inoltre osservare che lo spazio delle funzioni assolutamente continue <u>coincide</u> in buona sostanza con lo spazio di Sobolev $W^{1,1}(a,b)$: precisamente, ogni funzione assolutamente continua appartiene allo spazio di Sobolev e, viceversa, data $u \in W^{1,1}$, esiste una funzione assolut. continua che coincide quasi ovunque con u.

Ricordiamo brevemente:

(*) <u>Def. (derivata debole)</u>: Sia $u \in L^1(a,b)$. Una funzione $v \in L^1(a,b)$ si dice <u>derivata debole</u> di u se

$$\int_a^b u(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b v(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^1([a,b]) \quad \varphi(a)=\varphi(b)=0. \qquad (*)'$$

Abbiamo già visto (coroll. Lemma di Du Bois-Reymond, pag. 88) che se u, v continue, allora u è deriv. e $u'(x)=v(x)$: è infatti a questo risultato che possiamo fare risalire l'idea di derivata debole. Inoltre, si vede subito (con l'opportuna versione L^1 del lemma fond. del calcolo delle variazioni; pag. 29) che la derivata debole, se esiste, è unica! La indicheremo dunque con u'.

(*)' basta $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(]a,b[)$ a supporto compatto!!

(*) <u>NOTA</u>: Storicamente, è stata l'individuazione di una caratterizzazione maneggevole dello spazio funzionale analogo a $H^1(a,b)$ <u>in più dimensioni</u> che ha permesso di applicare con successo il metodo "diretto" per dim. l'esistenza di soluzioni di prob. di minimo. Accenniamo brevemente come introdurre una nozione "debole" di differenziabilità, adeguata al contesto.

<u>Def. (Spazi di Sobolev $W^{1,p}$)</u>: Sia $p \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le +\infty$. Definiamo lo spazio di Sobolev

$$W^{1,p}(a,b) = \{u \in L^p(a,b) : \exists\, u' \text{ derivata debole di } u, \text{ e } u' \in L^p(a,b)\}.$$

$W^{1,p}(a,b)$ è uno spazio vettoriale; con una delle seguenti norme equiv:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p} \qquad \text{opp.} \qquad \|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$$

$W^{1,p}(a,b)$ risulta uno spazio di Banach. La seconda norma è più vantaggiosa per $p=2$ perché deriva dal prodotto scalare $\langle u,v\rangle = \int_a^b uv\,dx + \int_a^b u'v'\,dx$.

<u>Teorema 1</u>: Se $u \in AC([a,b])$, allora $u \in W^{1,1}(a,b)$. Inoltre, la derivata classica di u (che sappiamo definita q.o.) è anche la derivata debole di u.

<u>Dim.</u> Poiché $u \in AC([a,b])$ si ha $u, u' \in L^1(a,b)$.
Sia $\varphi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ (basta $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([a,b])$. Si ha $\varphi \in AC([a,b])$ e $v = u\varphi \in AC([a,b])$. Quindi (vale il TFC)

$$v(b) - v(a) = \int_a^b v'(x)\,dx.$$

Essendo $v(b) = v(a) = 0$ si ha

$$0 = \int_a^b v'(x)\,dx = \int_a^b [u\varphi' + u'\varphi]\,dx,$$

che è esattamente come dire che u' è la derivata debole di u. $\square$

<u>Teorema 2</u>: Sia $u \in W^{1,1}(a,b)$. Allora $\exists\, \bar{u} \in AC([a,b])$ tale che $\bar{u}(x) = u(x)$ per q.o. $x \in]a,b[$;
inoltre $\bar{u}'(x) = Du(x)$ per q.o. $x \in]a,b[$, dove si è indicato (momentaneamente) con Du la derivata debole di u.

<u>Dim.</u> Poiché $u \in W^{1,1}(a,b)$ si ha $Du \in L^1(a,b)$. Poniamo per $x \in [a,b]$ $w(x) = \int_a^x Du(s)\,ds$. Allora $w \in AC([a,b])$, e $w'(x) = Du(x)$ per q.o. $x \in]a,b[$

D'altra parte, dal Teorema 1 (pag. 165) si ha $w \in W^{1,1}(a,b)$ e $Dw = w'$ q.o. su $]a,b[$ (Dw indica la derivata debole di w)

si ha $Du = Dw$ q.o. su $]a,b[$, ossia $D(u-w)=0$ q.o. su $]a,b[$

Dalla versione L^1 del Lemma di Du Bois-Reymond (vedi pag. 87 e ⊛) si ha $u(x)-w(x)=c$ quasi ovunque. Basta allora porre

$$\bar{u}(x) = w(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$$

e si ha la tesi. □

<u>OSS1.</u> Se $1<p\le+\infty$, le funzioni $W^{1,p}$ sono anche in $W^{1,1}$.

Se $u \in W^{1,p}$ possiamo dunque supporre (scegliendo il giusto rappresentante della classe di equivalenza di u in L^p) che la $u \in AC([a,b])$. In questo senso, lo spazio $W^{1,p}$ coincide con lo spazio delle funzioni assolut. continue la cui derivata appartiene a L^p.

Da quanto allora osservato si ha (vedi def. pag. 161)

$$H^1(a,b) = W^{1,2}(a,b).$$

Si ha analog. (vedi OSS. 1 pag. 164)

$$W^{1,p}(a,b) \subset \mathcal{C}^{0,1/q} \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

(funz. höldeniane con espon. $1/q$).

Le funzioni di $W^{1,\infty}$ sono poi lipschitziane. In realtà (sempre a patto di prendere il rappresentante assolutamente continuo di ogni classe di equivalenza) lo spazio $W^{1,\infty}$ <u>coincide</u> con lo spazio delle funzioni lipschitziane. Infatti, ogni funzione lipschitziana è $AC([a,b])$

⊛ $\forall g \in L^1(a,b)$ $\int_a^b g v' \, dx = 0$ $\forall v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ $v(a)=v(b)=0$ $\Rightarrow g(x)=c$ q.o. su $]a,b[$. □

$$0 = -\int_a^b D(u-w)\,\varphi\,dx \underset{\text{def. di derivata debole}}{=} \int_a^b (u-w)\,\varphi'\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1([a,b]),\ \varphi(a)=\varphi(b)=0 \Rightarrow u-w=c \text{ q.o. su }]a,b[. \ \square$$

e se u ha costante di Lipschitz k, $|u'(x)| \le k$ in tutti i pt, in cui esiste la derivata, quindi $u' \in L^\infty$ e $u \in W^{1,\infty}$.

Procedendo in modo completamente analogo a quanto fatto a pag. 156–157 (si sfrutta che le funzioni $W^{1,p}$ con $p>1$ sono hölderiane con costante controllata dalla norma L^p di u'; il teorema di compattezza di Ascoli–Arzelà e il fatto che $u_h \to u$ uniformemente, $u_h' \to v$ in L^p implica che $u \in W^{1,p}(a,b)$ e $v = u'$) si ha il seguente importante risultato di compattezza:

(per $p=2$)

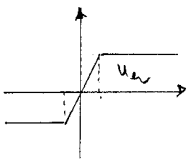
<u>Teorema</u> (di <u>compattezza debole in $W^{1,p}$</u>): Sia $(u_h) \subset W^{1,p}(a,b)$, $1<p<+\infty$ (e supp. che ognuna delle $u_h \in AC([a,b])$).
Se $\exists\ C>0$ t.c. $\|u_h'\|_{L^p} \le C \quad \forall h$

$$|u_h(a)| \le C \quad \forall h \ \circledast,$$

allora $\exists\ u \in W^{1,p}$ ed $\exists\ (u_{h_k})_k$ t.c.

$$\begin{cases} u_{h_k} \longrightarrow u & \text{uniformemente in } [a,b], \\ u_{h_k}' \longrightarrow u & \text{debole in } L^p(a,b). \end{cases}$$

<u>OSS.1</u> • Il teorema rimane valido anche per $p=+\infty$, ma è falso per $p=1$.



Infatti $u_h(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [-1, -\frac{1}{h}] \\ nx & \text{se } x \in [-\frac{1}{h}, \frac{1}{h}] \\ 1 & \text{se } x \in [\frac{1}{h}, 1] \end{cases}$ equilimitata in norma $W^{1,1}$ che converge ad una funzione discontinua $\square$

•• $\circledast$ può essere sostituito da $\|u_h\|_{L^p} \le C$. Infatti, $\forall\ x \in [a,b]$ $u(a) = u(x) - \int_a^x u'(t)\,dt$.
Quindi $|u(a)| \le |u(x)| + \int_a^b |u'(t)|\,dt$; inoltre $|u(a)| \le \frac{1}{b-a}\int_a^b |u(x)|\,dx + \int_a^b |u'(x)|\,dx \underset{\text{dis. di Hölder}}{\le} C(\|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p})$
e quindi, se vale $\|u_h\|_{L^p}$, $\|u_h'\|_{L^p} \le C$ si ha $|u_h(a)| \le C \ \forall h$. $\square$

Siamo ora in grado di enunciare e di dimostrare un risultato di seq. s.c.i. per funzionali integrali: assieme al teorema di compattezza si otterrà un risultato di esistenza.

Vorrei sottolineare che il teorema seg. dimostra che la convessità di $f(x,u,\xi)$ nella variabile ξ (questa richiesta è comunque molto più debole della richiesta di convessità del funzionale che abbiamo fatto nei teoremi visti nella prima parte del corso) è una condizione sufficiente per la semicontinuità di F (si dim. anche che essa è una cond. nec.)

NOTA: le ipotesi del teorema possono essere notevolmente indebolite (vedi [BGH] Cap. 3, Thm. 3.5, Remark 2

<u>Teorema (di semicontinuità di Tonelli)</u>: Sia $f:[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to[0,+\infty[$ t.c.

i) f, f_ξ sono continue in (x,u,ξ),

ii) $\xi\mapsto f(x,u,\xi)$ è convessa per ogni $(x,u)\in[a,b]\times\mathbb{R}$.

Allora

$$F(u)=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx$$

è ben definito $\forall\, u\in W^{1,1}(a,b)$ (anche se può assumere il valore $+\infty$ per qualche u). Inoltre, $\forall$ successione $(u_h)_h\subset W^{1,1}(a,b)$ convergente ad $u\in W^{1,1}(a,b)$ t.c.

$$u_h\longrightarrow u \quad \text{uniformemente in } [a,b]$$
$$u_h'\longrightarrow u' \quad \text{debole in } L^1(a,b)$$

si ha

$$F(u)\le \liminf_{h\to+\infty} F(u_h).$$

<u>Dim.</u> Per quanto riguarda la buona definizione del funzionale, si deve fare vedere che la funzione composta $x\longmapsto f(x,u(x),u'(x))$ è misurabile per ogni $u\in W^{1,1}(a,b)$. Per la dim. di questo fatto standard seguiamo [BGH] Cap. 3, Prop. 3.1.

Sia $(u_h)_h \subset W^{1,1}(a,b)$ convergente ad $u \in W^{1,1}(a,b)$ t.c.

$$u_h \to u \quad \text{uniform. su } [a,b]$$
$$u_h' \rightharpoonup u' \quad \text{debole in } L^1(a,b).$$

Supponiamo $F(u) < +\infty$ (quindi $x \mapsto f(x,u(x),u'(x)) \in L^1$).

Per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un compatto $K \subset [a,b]$ t.c. per il teorema di Lusin (*)

$$u,\ u' \text{ sono continue in } K,$$

e per l'assoluta continuità dell'integrale (vedi pag. 159)

$$\int_K f(x,u,u')\,dx \geq \int_a^b f(x,u,u')\,dx - \varepsilon$$

(se $F(u) = +\infty$, si può assumere $F(u,K) > \frac{1}{\varepsilon}$ (**) e si procede come segue).

Poiché <u>f è convessa in ξ</u>, si ha

$$F(u_h) \geq \int_K f(x,u_h,u_h')\,dx \geq \int_K f(x,u_h,u')\,dx + \int_K f_\xi(x,u_h,u')(u_h'-u')\,dx$$

$$= \int_K f(x,u_h,u')\,dx + \int_K f_\xi(x,u,u')(u_h'-u')\,dx$$
$$+ \int_K \left[f_\xi(x,u_h,u') - f_\xi(x,u,u')\right](u_h'-u')\,dx$$
$$= A_h + B_h + C_h$$

(*) <u>Teorema di Lusin</u>: Se $u:[a,b] \to \mathbb{R}$ è misurabile e $\varepsilon > 0$ $\exists K \subset [a,b]$, K compatto t.c. $|[a,b] \setminus K| < \varepsilon$ e $u|_K$ è continua.

(**) <u>Lemma</u>: Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ misurabile t.c. $\int_a^b |f(x)|\,dx = +\infty$. Allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c., se A è misurabile e $|A| < \delta$ si ha $\int_{[a,b]\setminus A} |f(x)|\,dx > \frac{1}{\varepsilon}$.

<u>Dim.</u> (per assurdo): Sia $\varepsilon_0 > 0$ t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists A_n$ misurabile con $|A_n| < \frac{1}{2^n}$ e $\int_{[a,b]\setminus A_n} |f(x)|\,dx \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$.
Ponendo $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$ succ. decrescente di insiemi misurabili
$f_n(x) \doteq |f(x)|\,\chi_{[a,b]\setminus B_n}(x)$ per Beppo-Levi abbiamo $+\infty = \int_a^b |f(x)|\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b |f_n(x)|\,dx$, ma anche $\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_{[a,b]\setminus B_n} |f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon_0}$. Assurdo! $\square$

Si ha $A_h \xrightarrow{h\to+\infty} \int_K f(x,u,u')\,dx$, poiché $u_h \to u$ in $\mathcal{C}^0([a,b])$ e f è continua.

Si ha $B_h \xrightarrow{h\to+\infty} 0$, poiché $f_\xi(x,u,u')$ è limitata (essendo u, u' continue su K insieme a f_ξ) e $u_h \rightharpoonup u$ debole in $L^1(a,b)$.

Infine $C_h \xrightarrow{h\to+\infty} 0$, poiché $(u_h'-u')_h$ sono equilimitate in $L^1(a,b)$ (vedi Teorema 1) ii) a pag. 153) e $f_\xi(x,u_h,u') - f_\xi(x,u,u')$ converge uniformemente a 0 su K per $h\to+\infty$.

Quindi si ottiene

$$\liminf_{h\to+\infty} F(u_h) \geq \liminf_{h\to+\infty} \int_K f(x,u_h,u_h')\,dx \geq \int_K f(x,u,u')\,dx$$

$$\geq \int_a^b f(x,u,u')\,dx - \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε si ha dunque la tesi. $\square$

Da questo teorema e dal teorema di compattezza debole in $W^{1,p}$ si ottiene immediatamente il seguente

<u>Teorema (di esistenza di Tonelli)</u>: Sia $f : [a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

i) f, f_ξ sono continue in (x,u,ξ);

ii) $\xi \mapsto f(x,u,\xi)$ è convessa per ogni $(x,u) \in [a,b]\times\mathbb{R}$;

iii) (coercitività) $\exists$ una costante $c>0$ ed una costante $p \geq 1$ t.c.

$$c|\xi|^p \leq f(x,u,\xi) \qquad \forall (x,u,\xi)$$

Allora, dato $F(u) = \int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx$, il problema variazionale

$$\inf\left\{ F(u) : u \in W^{1,p}(a,b),\ u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta \right\} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R} \text{ fissati}$$

ammette una soluzione.

<u>Dim.</u> Dalla coercitività segue che F è limitata dal basso. Sia $(u_h)_h$ una successione in $X_{\alpha,\beta} = \{u \in W^{1,p}(a,b) : u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\}$ t.c. $\lim_{h\to+\infty} F(u_h) = \inf_{u\in X_{\alpha\beta}} F(u) < +\infty$ (il funzionale è finito su tutte le funzioni di classe $\mathcal{C}^1([a,b])$ che soddisfano le cond. al contorno).

Allora, la successione $(F(u_h))_h$ è limitata da una costante e grazie alla coercitività si ha, per una opportuna costante $C>0$

$$\|u_h'\|_{L^p} \leq C \qquad \forall h .$$

Poiché inoltre $|u_h(a)| = |\alpha|$ $\forall h$, dal teorema di compattezza debole in $W^{1,p}$ (pag. 167) segue che $\exists$ una sottosuccessione $(u_{h_k})_k$ di $(u_h)_h$ e $u_0 \in W^{1,p}(a,b)$ t.c.

$$u_{h_k} \longrightarrow u_0 \text{ uniformemente in } [a,b]$$
$$u_{h_k}' \longrightarrow u_0' \text{ debole in } L^p(a,b)$$

(e a maggior ragione, debole in $L^1(a,b)$). Dal teorema di semicontinuità di Tonelli abbiamo

$$F(u_0) \leq \liminf_{k\to+\infty} F(u_{h_k}) = \lim_{h\to+\infty} F(u_h) = \inf_{u\in X_{\alpha,\beta}} F(u).$$

Osservando infine che $u_0(a)=\alpha$, $u_0(b)=\beta$ (essendo u_0 limite uniforme di funzioni che soddisfano le cond. al bordo!) si ha $u_0 \in X_{\alpha,\beta}$ e u_0 è dunque la soluzione ricercata. $\square$

<u>Applicazione all'esempio di Weierstrass</u> (vedi pag. 20)

Consideriamo il funzionale

$$F(u) = \int_{-1}^{1} x^2 (u'(x))^2$$

e il prob. variazionale associato $\inf\{F(u) : u \in W^{1,2}(-1,1),\ u(-1)=-1,\ u(1)=1\}$.

Abbiamo osservato a pag. 20 che $F(u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{C}^1([-1,1])$, inoltre $\exists$ una succ. $(u_h) \in X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$ t.c. $\lim_{h \to +\infty} F(u_h) = 0$, per cui $\inf_{u \in X} F(u) = 0$, e ovviamente

$$\inf \{F(u) : u \in W^{1,2}(-1,1) \; ; \; u(-1) = -1, u(1) = 1\} = 0.$$

D'altra parte, $\nexists \; u \in W^{1,2}(-1,1)$ con $u(-1) \neq u(1)$ t.c. $F(u) = 0$, poiché questo implicherebbe $u' = 0$ q.o. su $]-1,1[$ e quindi $u(-1) = u(1)$.

Osserviamo che il funzionale è seq. semicontinuo inferiormente in $W^{1,2}$, ma la funzione lagrangiana $f(x,\xi) = x^2 \xi^2$ non soddisfa la condizione di crescita richiesta nel teorema di esistenza di Tonelli (pag. 170). $\square$