L'eq. di Eulero - Lagrange si scrive

$$u''(x) = g(x) \qquad \text{in } [0,1].$$

Allora

$$u'(x) = \int_0^x g(s)\,ds + c_1 ,$$

e infine

$$u(x) = \int_0^x \left(\int_0^t g(s)\,ds \right) dt + c_1 x + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Se poniamo $\hat{g}(x) := \int_0^x \left(\int_0^t g(s)\,ds \right) dt$, allora scriviamo

$$u(x) = \hat{g}(x) + c_1 x + c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Imponendo $u(0) = u(1) = 0$ si ottiene $c_2 = 0$ poiché $\hat{g}(0) = 0$, e $c_1 = -\hat{g}(1)$, quindi l'unica soluzione del nostro pbm. di minimo è $u(x) = \hat{g}(x) - \hat{g}(1)\,x$, $x \in [0,1]$. $\square$

<u>NOTA 1</u>: Spesso nell'esposizione degli esempi precedenti abbiamo parlato di convessità / stretta convessità dei funzionali (integrali) F (vedi anche NOTA a fondo pag. 40) senza aver dato prima la definizione di tali concetti, ma basandoci su una loro definizione "intuitiva" a partire dai concetti di convessità / stretta convessità delle loro funzioni integrande. Precisiamo brevemente in seguito questi concetti per funzionali in generale, ottenendo così come corollario anche una precisazione dei concetti già usati in modo intuitivo (vedi applicazione di seguito).

L'estensione dei concetti di sottoinsieme K convesso di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ e di funzione $F : K \to \mathbb{R}$ convessa (strett. convessa) è ovvia:

- $K \subseteq V$ convesso $\Leftrightarrow$ $\lambda x + (1-\lambda) y \in K \quad \forall\, x, y \in K \quad \forall \lambda \in [0,1]$;
- F è convessa $\Leftrightarrow$ $F(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda) F(y) \quad \forall x, y \in K \quad \forall \lambda \in [0,1]$
  strett. convessa se la disug. è stretta $\forall\, x, y \in K \quad x \neq y$ e $\lambda \in]0,1[$.

Per le funzioni $F: K \to \mathbb{R}$ per cui esiste la variazione prima $\delta F(y,v)$ $\forall y \in K$, $\forall v \in V$ t.c. $y+v \in K$, la convessità si caratterizza in un modo simile a quella per funzioni derivabili su $\mathbb{R}$.

<u>Prop.</u> Sia K un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale V $F: K \to \mathbb{R}$ t.c. $\delta F(y,v)$ esiste per ogni $y \in K$, $\forall v \in V$ t.c. $y+v \in K$. Allora F è convessa se e solo se

$$\circledast \qquad F(y+v) \geq F(y) + \delta F(y,v) \quad \forall y \in K, \forall v \in V \text{ t.c. } y+v \in K.$$

Inoltre, F è strett. convessa se e solo $=$ si ha solo per $v=0$.

<u>Dim.</u> Abbiamo già osservato che è suff. verificare la convessità sui segmenti in K; la convessità di F è equivalente alla convessità della funz. di una variabile $\phi(t) = F(y_0 + t v_0)$ $\forall$ $y_0 \in K$, $v_0 \in V$ t.c. $y_0 + v_0 \in K$ (definita su $[0,1]$ di $\mathbb{R}$; l'abb. già osservato nel caso K convesso $\subseteq \mathbb{R}^n$ pag. 30-31) da cui segue facilmente la disug. $\circledast$ $\square$

<u>Applicazione</u> (sistemazione rigorosa di quanto già usato "intuitivamente").

Se $K = X = \{u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha, u(b) = \beta\} \subseteq V = \mathcal{C}^1([a,b])$ e

$$F(u) = \int_a^b f(x, u(x), u'(x))\, dx$$

con $f \in \mathcal{C}^1([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, allora $\delta F(u,v)$ è definita $\forall u \in K$ $\forall v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $v(a) = v(b) = 0$ e

$$\delta F(u,v) = \int_a^b \left[f_u(x, u(x), u'(x))\, v(x) + f_\xi(x, u(x), u'(x))\, v'(x) \right] dx.$$

È banale osservare che l'ipotesi $(u,\xi) \mapsto f(x,u,\xi)$ convessa (strettamente convessa) $\forall x \in [a,b]$ e $f \in \mathcal{C}^1$, garantisce dunque la convessità (stretta convessità) di F.

Inoltre, se vale la condizione di convessità "indebolita"

$$f(x,u+v,\xi+\eta) \geq f(x,u,\xi) + f_u(x,u,\xi)v + f_\xi(x,u,\xi)\eta$$

con $=$ se e solo se $v=0$ <u>oppure</u> $\eta=0$ (vedi NOTA a fondo pag. 40), allora risulta F strett. convesso: infatti dalla disug. sopra si ottiene $F(u+v) \geq F(u) + \delta F(u,v)$ con $=$ $\Leftrightarrow v(x)v'(x)=0 \Leftrightarrow (v^2(x))'=0 \Leftrightarrow v^2(x)\equiv c$ su $[a,b]$. Dalla cond. $v(a)=0$ si ottiene allora $v\equiv 0$ su $[a,b]$, cioè quanto si vuole. $\square$

<u>NOTA 2:</u> Il teorema 2, pag. 40 si può ottenere infine immediatamente dal seguente risultato più generale:

<u>Prop.</u> Sia K un sottoinsieme convesso di uno spazio vettoriale V, $F: K \to \mathbb{R}$ t.c. $\delta F(y,v)$ esiste per ogni $y\in K$, $\forall v\in V$ t.c. $y+v\in K$. Se F è convessa e $y_0\in K$ è t.c. $\delta F(y_0,v)=0$ $\forall v\in V$ t.c. $y_0+v\in K$, allora y_0 è un pt. di minimo (assoluto) per F in K.
Se poi F è strett. convessa, non ci possono essere altri pt. di minimo.

<u>Dim.</u> Supp. $\delta F(y_0,v)=0$ $\forall v\in V$ t.c. $y_0+v\in K$. Sia $y\in K$; dob. provare $F(y)\geq F(y_0)$. Dalla convessità si ha con $y=y_0$ e $v=y-y_0$

$$F(y) \geq F(y_0) + \delta F(y_0, y-y_0) = F(y_0).$$

Se poi F è strett. convessa, l'ultima disug. è stretta se $y-y_0\neq 0$; quindi ogni pt. di K diverso da y_0 non è un minimo assoluto! $\square$

Problemi variazionali con vincolo isoperimetrico

Una classe importante di problemi variazionali è quella dei problemi variazionali con vincolo isoperimetrico: vogliamo minimizzare un certo funzionale integrale F tra tutte le funzioni con dato al bordo fissato per le quali un altro funzionale G assume valore costante.

Questo problema di minimo vincolato assomiglia a quelli che, in dimensione finita, si risolvono con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange!

E, infatti, vale un risultato molto simile, e otteniamo una generalizzazione del Teorema 1 (pag. 34) al caso

$$(P)_G \qquad \inf_{u \in X_G} F(u) \,,$$

dove $X_G = \left\{ u \in \mathcal{C}^1([a,b]) : u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta,\ G(u) = \int_a^b g(x, u(x), u'(x))\,dx = c \right\}$.
con c una costante fissata.

<u>Teorema (dei moltiplicatori di Lagrange)</u>: Siano dati due funzionali integrali

$$F(u)=\int_a^b f(x,u(x),u'(x))\,dx \qquad G(u)=\int_a^b g(x,u(x),u'(x))\,dx.$$

i) Siano $f, g \in \mathcal{C}^1([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Se $u_0 \in X_G$ è una funzione minimizzante di $(P)_G$ ed $\exists\, \psi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $\psi(a)=\psi(b)=0$ t.c. $\delta G(u_0,\psi)\neq 0$, allora $\exists\, \lambda\in\mathbb{R}$ (moltiplicatore di Lagrange) tale che, posto $\tilde{F} \doteq F+\lambda G$ si ha

$$\delta \tilde{F}(u_0,v) = 0 \;(*) \quad \forall\, v\in \mathcal{C}^1([a,b]) \text{ con } v(a)=v(b)=0.$$

ii) Se inoltre $f, g \in \mathcal{C}^2([a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e $u_0 \in X_G \cap \mathcal{C}^2([a,b])$, allora

$$\frac{d}{dx}\left[\tilde{f}_\xi(x,u_0(x),u_0'(x))\right] = \tilde{f}_u(x,u_0(x),u_0'(x)) \quad \forall x\in[a,b]$$

dove $\tilde{f}(x,u,\xi)$ è la lagrangiana $\tilde{f} \doteq f+\lambda g$.

<u>OSS.1</u> Con opportune ipotesi di convessità, dal risultato precedente si possono ottenere delle condizioni sufficienti. Per esempio, supponiamo che F e G siano funzionali convessi e che $\exists$ano $u_0 \in \mathcal{C}^1([a,b])$ e $\lambda>0$ tali che

$$\delta \tilde{F}(u_0,v)=0 \quad \forall\, v\in \mathcal{C}^1([a,b]) \text{ con } v(a)=v(b)=0.$$

Allora sappiamo che u_0 minimizza il funzionale $\tilde{F}$ tra tutte le funzioni con lo stesso valore al bordo. (**)

In particolare, possiamo certamente dire che u_0 minimizza F tra tutte le funzioni u con lo stesso dato al bordo e con $G(u)=G(u_0)$. Se poi <u>uno</u> dei due funzionali è strettamente convesso, abbiamo anche l'unicità!!

(*) $\delta\tilde{F} = \delta F + \lambda\,\delta G$

(**) $\tilde{F}=F+\lambda G$ risulta convessa su $X=\{u\in\mathcal{C}^1([a,b]) : u(a)=\alpha,\ u(b)=\beta\}$, e quindi quanto affermato segue dalla Prop. a pag. 68.

Operativamente, se F e G sono convessi, possiamo procedere cercando le soluzioni dell'eq. di Eulero-Lagrange per $\tilde{F}$ (con i dati al bordo che ci interessano) e vedere poi se troviamo $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che il funzionale G assuma il valore voluto e che $\tilde{F}$ rimanga convesso.

Prima di vedere ciò in azione (vedi Es. 1 pag. 72) proviamo il teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

<u>Dim.</u> i) Data $v \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $v(a)=v(b)=0$ definiamo la seguente funzione di due variabili (che esiste in un intorno dell'origine)

$$\phi(s,t) = G(u_0 + sv + t\psi).$$

Risulta $\phi \in \mathcal{C}^1$, $\phi(0,0) = G(u_0)$ $\quad \phi_t(0,0) = \delta G(u_0, \psi) \neq 0$.

Possiamo applicare il teorema delle funzioni implicite e troviamo un intorno I di 0 (in $\mathbb{R}$) e una funzione di classe $\mathcal{C}^1$, $t(s): I \to \mathbb{R}$ t.c. $\phi(s, t(s)) \equiv G(u_0)$ $\forall s \in I$. Inoltre si ha

$$t'(s) = -\frac{\phi_s(s,t(s))}{\phi_t(s,t(s))} \qquad \forall s \in I.$$

Abbiamo allora che $\forall s \in I$ la funzione $u_0 + sv + t(s)\psi \in X_G$, e quindi deve essere

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{ds} F(u_0 + sv + t(s)\psi)\Big|_{s=0} \\ &= \delta F(u_0, v) + \delta F(u_0, \psi)\, t'(0) \\ &= \delta F(u_0, v) - \delta F(u_0, \psi) \frac{\delta G(u_0, v)}{\delta G(u_0, \psi)}. \end{aligned}$$

La tesi segue allora immediatamente ponendo $\lambda \doteq -\dfrac{\delta F(u_0,\psi)}{\delta G(u_0,\psi)}$.

ii) Da i) abbiamo allora $\forall v \in \mathcal{C}^1([a,b])$, $v(a)=v(b)=0$

$$\int_a^b \left\{ \left[f_\xi(x,u_0,u_0')v' + f_u(x,u_0,u_0')v \right] + \lambda \left[g_\xi(x,u_0,u_0')v' + g_u(x,u_0,u_0')v \right] \right\} dx = 0 .$$

Integrando per parti (i termini con v') tenendo conto che $v(a)=v(b)=0$ e applicando il lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni (pag. 29) otteniamo

$$\frac{d}{dx}\left[f_\xi(x,u_0(x),u_0'(x)) + \lambda g_\xi(x,u_0(x),u_0'(x)) \right] = f_u(x,u_0(x),u_0'(x)) + \lambda g_u(x,u_0(x),u_0'(x))$$

ossia

$$\frac{d}{dx}\left[\tilde{f}_\xi(x,u_0(x),u_0'(x)) \right] = \tilde{f}_u(x,u_0(x),u_0'(x)) \quad \text{su } [a,b] .$$

$\square$

<u>NOTA</u>: le ipotesi di regolarità per f, g, u_0 sul bordo di $[a,b]$ possono essere indebolite ottenendo l'eq. di Eulero-Lagrange per $\tilde{F}$ su $]a,b[$. $\square$

<u>Es. 1</u> Consideriamo il funzionale $F(u) = \int_0^1 (u'(x))^2 dx$ su $X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0)=u(1)=0\}$. Vogliamo determinare, se esiste, la soluzione del prob. di minimo

$$(P)_G \qquad \inf_{u \in X_G} F(u)$$

dove $X_G = X \cap \{u \in \mathcal{C}^1([0,1]) : G(u) = \int_0^1 u(x)\,dx = 1\}$.

Notiamo che $f(x,u,\xi) = \xi^2$ è una funzione strettamente convessa in ξ e $g(x,u,\xi) = u$ è una funzione convessa in u.

Quindi, poniamo

$$\tilde{f}(x,u,\xi) = \xi^2 + \lambda u ,$$

e cerchiamo $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\lambda g(x,u,\xi)$ rimanga convessa (*), mentre l'eq. di Eulero-Lagrange per $\tilde{F}(u) = \int_0^1 \tilde{f}(x,u,u')\,dx$

$$\frac{d}{dx}\left[\tilde{f}_\xi(x,u,u') \right] = \tilde{f}_u(x,u,u') \quad \text{su } [0,1]$$

abbia una soluzione $u_0 \in X_G \cap \mathcal{C}^2([0,1])$.

(*) in questo caso un qualunque $\lambda \in \mathbb{R}$ conserva la convessità di g!

Oss. che $\delta G(u,\psi) = \int_0^1 \psi(x)dx \quad \forall u \in X$ e quindi $\forall \; u \in X_G$ $\exists \psi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ con $\psi(a) = \psi(b) = 0$ t.c. $\delta G(u,\psi) \neq 0$ e quindi in particolare sarà $\delta G(u_0,\psi) \neq 0$ per qualche ψ.

Ora, siccome g è lineare in u (e ξ), $\lambda g(x,u,\xi) = \lambda u$ è convessa in u $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

L'eq. diff. diventa

$$2u''(x) = \lambda \qquad \forall x \in [0,1] \quad ,$$

e l'integrale generale di tale eq. diff. risulta

$$u(x) = \frac{\lambda}{4}x^2 + c_1 x + c_2 \; ;$$

le condizioni al contorno $u(0) = 0 = c_2$

$$u(1) = 0 = \frac{\lambda}{4} + c_1$$

danno

$$u_0(x) = -\frac{\lambda}{4}x(1-x) \qquad \in X \; .$$

Dal teorema precedente e dall'OSS.1 (pag.70) possiamo dire (essendo $\tilde{F}$ strettamente convessa) che $u_0(x) = -\frac{\lambda}{4}x(1-x)$ minimizza F su X — è anche unica — con il vincolo $G(u) = G(u_0)$.

Rimane da verificare che possiamo scegliere λ t.c. $G(u_0) = 1$

Vogliamo allora

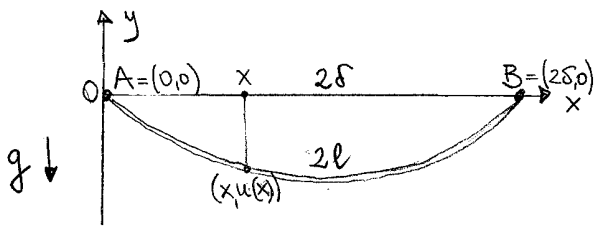
$$G(u_0) = 1 = -\frac{\lambda}{4}\int_0^1 x(1-x)\,dx = -\frac{\lambda}{4}\left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = -\frac{\lambda}{24} \; ,$$

ossia $\lambda = -24$. Siccome $-24g(x,u,\xi)$ è ancora convessa in u, abbiamo trovato l'unica soluzione del ns. pbm. $(P)_G$:

$$\underline{\underline{u_0(x) = 6x(1-x)}} \qquad \text{su } [0,1] \; . \qquad \blacksquare$$

Es. 2 (il pbm. della catenaria - il pbm. del filo pesante) (*)

Vogliamo trovare il profilo di un lungo filo sottile, flessibile ed inestensibile, di lunghezza 2ℓ e densità per unità di lunghezza costante, con i due estremi fissati ad altezza 0 e a distanza 2δ l'uno dall'altro, $\delta < \ell$. Supponiamo che l'unica forza che agisce sul filo sia la gravità (agente in direzione dell'asse y negativa).



Evidentemente, il filo si disporrà in modo da minimizzare l'energia potenziale gravitazionale.

Se supponiamo che il filo è geometricamente descritto dal grafico di una funzione $y = u(x)$, $0 \le x \le 2\delta$, allora l'energia potenziale dell'intero filo è data, a meno di una costante additiva, da

$$F(u) = \int_0^{2\delta} g\rho\, u(x) \sqrt{1+(u'(x))^2}\, dx, \quad (**)$$

ρ = densità per unità di lunghezza
g = accelerazione gravitazionale cost. costante

mentre l'ipotesi di inestensibilità porta al vincolo

$$\int_0^{2\delta} \sqrt{1+(u'(x))^2}\, dx = 2\ell. \qquad \text{(la lunghezza del filo si conserva)}$$

La forma del filo pesante in equilibrio è allora descritta dal minimo u dell'energia potenziale $F(u)$ sotto le condizioni suddette

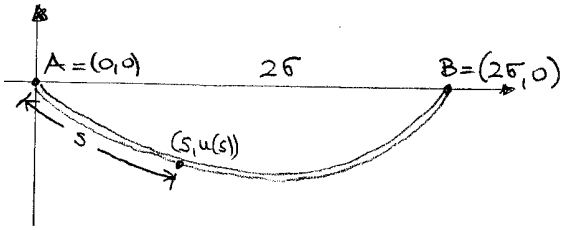
$$\int_0^{2\delta} \sqrt{1+(u'(x))^2}\, dx = 2\ell \qquad u(0)=0, \quad u(2\delta)=0.$$

(*) Il pbm. è stato proposto da Galileo nel 1638. La soluzione è stata trovata indipendentemente da Jakob & Johann Bernoulli, Huygens e Leibniz tra 1690 e 1692.

(**) Il funzionale energia non è convesso !! (si può provare che $f(x,u,\xi) = u\sqrt{1+\xi^2}$ non è convessa oppure provare che non si ha $F(u+v) \ge F(u) + \delta F(u,v)$, $\forall u \in X = \{u \in C^1([0,2\delta]), u(0)=u(2\delta)=0\}$, $\forall u+v \in X$. Basta prendere $v = -u$.

Affrontiamo il problema utilizzando il parametro lunghezza d'arco:

$$x = x(s) \qquad\qquad s \in [0, 2\ell]$$
$$y = u(x(s)) \doteq u(s)$$



Allora, l'energia potenziale possiamo riscriverla nella forma

$$F(u) = \int_0^{2\ell} u(s)\,ds$$

(a meno della costante moltiplicativa ρg). Siccome inoltre $(x'(s))^2 + (u'(s))^2 = 1$ si ha $x'(s) = \sqrt{1-(u'(s))^2}$ e il vincolo sopra si trasforma nel vincolo che gli estremi del filo abbiano distanza 2δ: consideriamo allora

$$G(u) = \int_0^{2\ell} \sqrt{1-(u'(s))^2}\,ds = 2\delta \qquad (*)$$

(si conserva l'ampiezza dell'intervallo congiungente A e B)

Ora $f(x,u,\xi) = u$ è convessa in u, mentre
$g(x,u,\xi) = -\sqrt{1-\xi^2}$ è strettamente convessa in ξ $\quad (\xi \in]-1,1[)$

(osserviamo che $(x'(s))^2 + (u'(s))^2 = 1$ implica $|u'(s)| \leq 1$ $\forall s$ e se $|u'(s_1)| = 1$, il filo avrebbe una cuspide; quindi possiamo supporre $|u'(s)| < 1$).

Consideriamo allora il funzionale (strettamente) convesso

$$\tilde{F}(u) = F(u) - \lambda\, G(u) \qquad \lambda > 0.$$

Se troviamo $\lambda > 0$ e una soluzione $u \in \mathcal{C}^2$ dell'eq. di Eulero di $\tilde{F}$ che soddisfi sia le condizioni al contorno

$$u(0) = u(2\ell) = 0$$

(*) $\delta G(u,\psi) = -\int_0^{2\ell} \frac{u'\psi'}{\sqrt{1-u'^2}}\,ds = \int_0^{2\ell} \frac{u''\psi}{\sqrt{1-u'^2}}\,ds = 0 \;\forall \psi \in \mathcal{C}$ con $\psi(0) = \psi(2\ell) = 0 \Leftrightarrow u''(s) = 0 \Leftrightarrow u(s) = as + b \Leftrightarrow u \equiv 0$!!
ma questo non è possibile! Non soddisfa il vincolo

che il vincolo isoperimetrico

$$G(u) = 2\delta ,$$

questa sarà l'unica soluzione del nostro problema variazionale e avremo determinato unicamente la forma del filo!

L'eq. di Eulero-Lagrange è

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{\lambda u'(s)}{\sqrt{1-(u'(s))^2}}\right] = 1 , \qquad \text{su } [0,2\ell].$$

Otteniamo allora

$$\frac{\lambda u'(s)}{\sqrt{1-(u'(s))^2}} = s + c , \qquad c \in \mathbb{R} \text{ arbitraria}$$

ossia

$$\lambda^2 (u'(s))^2 = (s+c)^2 \left(1 - (u'(s))^2\right)$$

e quindi

$$u'(s) = \frac{s+c}{\sqrt{\lambda^2 + (s+c)^2}} \quad \text{su } [0,2\ell].$$

Possiamo fare la ragionevole ipotesi fisica che il profilo sia simmetrico rispetto al punto di mezzo $s=\ell$ del filo, dove esso avrà altezza minima:

In tal caso dovremo avere $u'(\ell)=0$, da cui $c=-\ell$. Abbiamo allora la soluzione (soddisfa $u(0)=u(2\ell)=0$)

$$u(s) = \int_0^s \frac{\tau-\ell}{\sqrt{\lambda^2+(\tau-\ell)^2}}\, d\tau = \sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2} - \sqrt{\lambda^2+\ell^2} ,$$

purché si riesca a determinare $\lambda>0$ in modo che valga $G(u)=2\delta$.

Dall'assunzione di simmetria basta provare che $\exists \lambda>0$ t.c.

$$\delta = x(\ell) = \int_0^\ell \sqrt{1-\left(\frac{s-\ell}{\sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2}}\right)^2}\, ds = \int_0^\ell \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2}}\, ds .$$

Poniamo

$$h(\lambda) \doteq \int_0^{\ell} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2}}\, ds$$

$$\underset{\frac{\ell-s}{\lambda}=z}{=} -\int_{\frac{\ell}{\lambda}}^{0} \frac{\lambda^2}{\lambda\sqrt{1+z^2}}\, dz = \lambda \int_0^{\ell/\lambda} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} .$$

$$= \lambda \operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right) = \frac{\operatorname{senh}^{-1}\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)}{1/\lambda} .$$

Abbiamo che $h(\lambda)$ è una funzione continua e positiva su $]0,+\infty[$.
Applicando la regola di de l'Hôpital si può verificare facilmente che

$$\lim_{\lambda\to 0^+} h(\lambda) = 0 \quad , \quad \lim_{\lambda\to+\infty} h(\lambda) = \ell .$$

Per il teorema dei valori intermedi esiste almeno un λ t.c. $h(\lambda)=\delta$ (ricorda $\delta<\ell$!), e la dim. è conclusa.
Nota che, in generale, come sopra si ha $\forall s\in[0,2\ell]$

$$x(s) = \int_0^s \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(\tau-\ell)^2}}\, d\tau = \delta - \lambda \sinh^{-1}\left(\frac{\ell-s}{\lambda}\right)$$

$$u(s) = \sqrt{\lambda^2+(s-\ell)^2} - \sqrt{\lambda^2+\ell^2} .$$

(forma parametrica). Si può facilmente trovare $s(x)$ dalla prima equazione

$$s(x) = \ell - \lambda \operatorname{senh}\left(\frac{\delta-x}{\lambda}\right)$$

ed inserendo nella seconda eq. trovare

$$y = u(x) = \sqrt{\lambda^2+\lambda^2\left(\operatorname{senh}\left(\frac{\delta-x}{\lambda}\right)\right)^2} - \sqrt{\lambda^2+\ell^2}$$

$$= \lambda \cosh\left(\frac{\delta-x}{\lambda}\right) - \sqrt{\lambda^2+\ell^2} .$$

Abbiamo così ottenuto che la catenaria è il grafico di una funzione coseno iperbolico! $\square$