CASO 1.a : f convessa (sempre $f(x,u,\xi)=f(\xi)$!)

In questo caso u_0 è un minimizzante. Questo segue dal Teor. 2 ii) pag. 40, ma può essere dim. anche in modo elementare usando la disug. di Jensen (vedi pag. 32). Infatti, $\forall u \in X$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u'(x))\,dx \geq f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u'(x)\,dx\right)$$

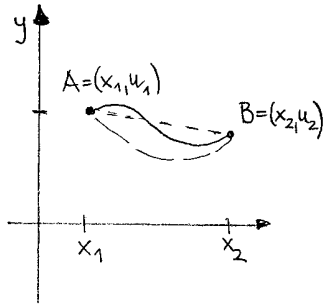
$$= f\left(\frac{u(b)-u(a)}{b-a}\right) = f\left(\frac{\beta-\alpha}{b-a}\right) = f(u_0'(x))$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u_0'(x))\,dx\,,$$

da cui segue immediatamente che $F(u) \geq F(u_0)$ $\forall u \in X$. $\square$

Es. 1 (curva di minima lunghezza - caso non parametrico) pag. 12

Per quanto visto sopra, l'unica soluzione del pbm.



$$(P1) \qquad \min_{u\in X}\left\{ L(u) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(u'(x))^2}\,dx \right\}$$

con $X = \{u \in \mathcal{C}^1([x_1,x_2]) : u(x_1)=u_1\,,\ u(x_2)=u_2\}$

è data da

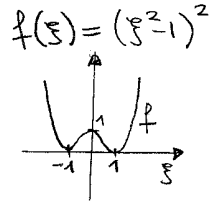
$$u_0(x) = \frac{u_2-u_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+u_1\,,$$

ossia dalla retta congiungente $A=(x_1,u_1)$ e $B=(x_2,u_2)$.

(basta osservare che $f(x,u,\xi)=f(\xi)=\sqrt{1+\xi^2}$ è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e convessa. Unicità della soluzione segue dall'unicità di un estremale per L in X).

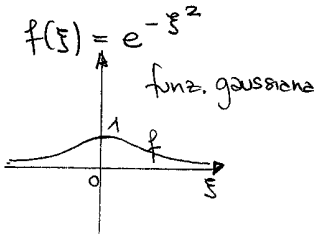
CASO (1.b) : f non convessa (sempre $f(x,u,\xi)=f(\xi)$!)

In questo caso, in generale, (P) non ha soluzione e quindi u_0 sopra non è necessariamente un minimo.



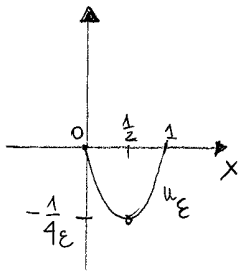
Es. 1 (paradosso di Eulero, pag. 38 e nota a fondo pag. 39)

Abbiamo già visto che in questo caso $\inf_{u\in X} F(u)=0$ con $X=\{u\in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0)=u(1)=0\}$, mentre $u_0(x)\equiv 0 \in X$, estremale di F, dà $F(0)=1$. □



Es. 2 Consideriamo ora $F(u)=\int_0^1 e^{-(u'(x))^2}dx$ su $X=\{u\in \mathcal{C}^1([0,1]) : u(0)=u(1)=0\}$. Allora $u_0(x)\equiv 0 \in X$ è estremale di F, ma ovviamente $\sup_{u\in X} F(u) = F(u_0)$, cioè u_0 è un massimizzante di F nella classe delle funzioni ammissibili X.

Si verifica facilmente che $\inf_{u\in X} F(u)=0$, ma $\nexists \min_{u\in X} F(u)$.



Infatti, consideriamo per $\varepsilon>0$ fissato,

$$u_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4\varepsilon}.$$

Allora $u_\varepsilon\in X$ e

$$0\le F(u_\varepsilon)=\int_0^1 e^{-\frac{4}{\varepsilon^2}(x-\frac{1}{2})^2}dx \underset{\frac{2}{\varepsilon}(x-\frac{1}{2})=s}{=} \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} e^{-s^2}ds \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}ds = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\pi} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

Quindi $\inf_{u\in X} F(u)=0$. D'altra $\nexists\, u_0\in X : F(u_0)=0$.

□

CASO (2) : $f(x,u,\xi) = f(x,\xi)$

In questo caso l'eq. di Eulero - Lagrange (EE) è

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\left[f_\xi(x,u')\right] = 0 \qquad \text{su } [a,b], \\ \text{i.e. } f_\xi(x,u') = \text{cost.} \end{array}}$$

Quest'equazione è già più difficile da risolvere di quella precedente, e in generale non ha una soluzione semplice come quella del CASO (1).

Oss. che se riusciamo a risolvere quest'eq. (diff. implicita) rispetto ad u', cioè

$$u'(x) = g(x, c_1), \qquad c_1 = f_\xi(x,u')$$

allora

$$u(x) = \int_a^x g(t,c_1)\,dt + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Sono gli estremali di F.

Es. 1 (esempio di Weierstrass, pag. 20).

Abbiamo $f(x,\xi) = x^2\xi^2$ (notiamo che $\xi \longmapsto f(x,\xi)$ è convessa $\forall x \in [-1,1]$) e $X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = -1, u(1) = 1\}$.

L'eq. di Eulero-Lagrange (EE) si scrive $\frac{d}{dx}\left[2x^2u'(x)\right] = 0$, i.e.

$$2x^2u'(x) = c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R}, \quad x \in [-1,1].$$

Se $c_1 = 0$, allora $u(x) = \text{cost.}$ è un estremale per F, ma $u \notin X$.

Se $c_1 \neq 0$, $\nexists\, u \in \mathcal{C}^2([-1,1])$ soluzione di $2x^2u'(x) = c_1$.

Infatti, per $x \in]0,1]$ $\quad u'(x) = \dfrac{c_1}{2x^2}$, i.e.

$$u(x) = -\frac{c_1}{2x} + c_2 .$$

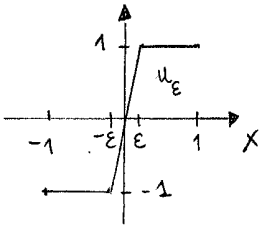
per $x \in [-1,0[$ $\quad u'(x) = \dfrac{c_1}{2x^2}$, i.e.

$$u(x) = -\frac{c_1}{2x} + c_3 .$$

Abbiamo già provato che $\inf_{u\in X} F(u) = 0$, ma $\nexists\, u_0 \in X : F(u_0)=0$.

Osserviamo che questo pbm. non ha nemmeno soluzione in $\mathcal{C}^1_{\text{tratti}}$ (ma in nessun spazio di Sobolev ⊛).

Proviamo che $\inf_{u\in Y} F(u) = 0$, dove $Y = \{u \in \mathcal{C}^1_{\text{tratti}}([-1,1]) : u(-1)=-1,\ u(1)=1\}$.



$$\forall \varepsilon > 0 \qquad u_\varepsilon(x) = \begin{cases} -1 & \text{su } [-1,-\varepsilon] \\ \frac{1}{\varepsilon}x & \text{su } [-\varepsilon,\varepsilon] \\ 1 & \text{su } [\varepsilon, 1] \end{cases} \qquad u_\varepsilon \in Y$$

Inoltre

$$0 \le F(u_\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}\,dx = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{3} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0;$$

quindi $\inf_{u\in Y} F(u) = 0$. Se esistesse $u_0 \in Y$ t.c. $F(u_0)=0$, dovrebbe essere $u_0' = 0$ quasi ovunque su $]0,1[$. Essendo u_0 continua e $u_0(-1)=-1$, deve essere $u_0 \equiv -1$, ma questo è incompatibile con $u_0(1)=1$. $\square$

⊛ Si può dimostrare che il minimo esiste nello spazio delle funzioni SBV (funzioni a variazione limitata speciali). Per una buona definizione di F si deve estendere il concetto di u' in questo spazio funzionale. Si prova che $u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\in[-1,0] \\ 1 & \text{se } x \in]0,1] \end{cases} \in SBV(-1,1)$ ed è un minimo per F.

CASO (3) : $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$

Anche se questo caso è molto più difficile da trattare di quelli precedenti, esso ha l'importante proprietà di avere l'integrale primo Φ per le soluzioni dell'eq. di Eulero-Lagrange. L'eq. di Eulero-Lagrange (EE) è

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dx}\left[f_\xi(u,u')\right] = f_u(u,u') \qquad \text{su } [a,b] \\ \text{e, ogni soluzione } u \in \mathcal{C}^2([a,b]) \text{ di (EE) soddisfa} \\ f(u,u') - u' f_\xi(u,u') = \text{costante} \quad \text{su } [a,b]. \quad (**) \end{array}}$$

Caso (3.a): f convessa

Oss. usiamo solo (EE)

Es. 1 : Consideriamo il funzionale $F(u) = \int_{-1}^{1} \left[\frac{k}{2}(u'(x))^2 + g\,u(x)\right] dx$ con $k>0$, $g>0$ costanti. Vogliamo studiare il pbm.

$$(P) \qquad \inf_{u \in X} F(u) \qquad X = \{u \in \mathcal{C}^1([-1,1]) : u(-1) = u(1) = 0\}.$$

Osserviamo che $f(u,\xi) = \frac{k}{2}\xi^2 + gu$ è di classe $\mathcal{C}^2([-1,1]\times\mathbb{R})$. L'eq. di Eulero-Lagrange si scrive

$$k u'' = g \qquad \text{su } [-1,1]$$

ossia $u'' = \frac{g}{k}$ su $[-1,1]$. Ne segue $u'(x) = \frac{g}{k}x + c_1$ e $u(x) = \frac{g}{2k}x^2 + c_1 x + c_2$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se imponiamo che valgono le condizioni al bordo, vediamo che l'unica soluzione dell'eq. di Eulero-Lagrange è $u_0(x) = \frac{g}{2k}(x^2-1)$. Poiché il funzionale $F(u)$ è strettamente convesso(*), questo è l'unico minimo assoluto del nostro problema variazionale.

(*) vedi NOTA a fondo pag. 40.

(**) Eq. diff. del 1° ordine !! a differenza di (EE) che è del 2° ordine !!

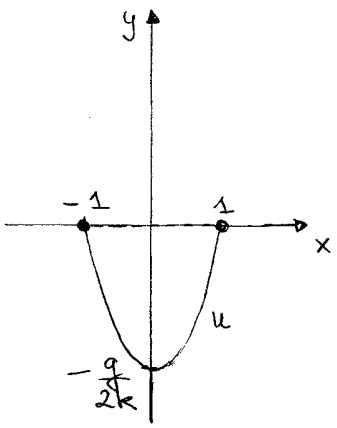
Oss. Corda elastica : interpretazione di $F(u) = \int_{-1}^{1} \left[\frac{k}{2} u'^2 + gu\right] dx$

Consideriamo una corda elastica che, nella sua posizione di riposo, è descritta dal segmento $[-1,1]$ sull'asse orizzontale. Se sulla corda agisce una distribuzione uniforme di carico, descritta da una costante positiva g, e $u(x)$ denota lo spostamento verticale, allora in accordo con il più semplice modello di elasticità lineare, l'energia elastica della corda è data da

$$\frac{k}{2} \int_{-1}^{1} (u'(x))^2 \, dx ,$$

dove $k>0$ costante dipende dal materiale di cui è fatta la corda. Supponendo che la corda sia fissata nei punti del bordo, dobbiamo minimizzare l'energia potenziale

$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{k}{2} (u'(x))^2 + gu\right] dx$$



sotto i vincoli $u(-1) = u(1) = 0$. Come visto sopra abbiamo l'unico minimo assoluto del problema dato da $u_0(x) = \frac{g}{2k}(x^2 - 1)$. $\square$

Oss. interpret. fisica di (EE) e dell'integrale primo $\Phi = cost$.

Es. 2 : Proponiamo il seguente esempio per l'interpret. fisica dell'eq. di Eulero-Lagrange e di Φ (dell'OSS. pag. 44).

Osserviamo che il Teorema 1 (pag. 34), Teorema 2 (pag. 40) possono essere generalizzati al caso di $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $n>1$. Le eq. di Eulero-Lagrange in questo caso sono un sistema di eq. differenziali ordinari.

Consideriamo allora $n=3$; inoltre denotiamo con t (tempo)

la variabile indipendente x, e sostituiamo u e ξ con x e v, rispettivamente.

Sia allora $V(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$, m una costante >0 e consideriamo la Lagrangiana

$$f(x,v) = \frac{m}{2}|v|^2 - V(x). \qquad (*)$$

Vogliamo allora trovare le funzioni $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ che rendono stazionario l'integrale

$$F(x) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} |\dot{x}(t)|^2 - V(x(t)) \right] dt .$$

In meccanica, $F(x)$ è <u>l'integrale azione</u> del moto $x = x(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ del pt. di massa m in un <u>campo di forze</u> conservative $-\nabla V$ con <u>energia potenziale</u> V, e $T = \frac{1}{2} m|\dot{x}|^2$ è <u>l'energia cinetica</u> del moto $x(t)$. Allora, l'eq. di Eulero-Lagrange dell'azione F è equivalente all'eq. di Newton

$$m\ddot{x} = -\nabla V(x) .$$

Consideriamo

$$E(x,v) = v \cdot f_v(x,v) - f(x,v) .$$

(abbiamo scelto $E = -\Phi$). Otteniamo

$$E(x,v) = \frac{m}{2}|v|^2 + V(x),$$

i.e. $E(x,\dot{x})$ è <u>l'energia totale</u> di un moto $x = x(t)$ e dall'OSS. (pag. 44) segue che

$$E(x(t), \dot{x}(t)) \equiv \text{const}$$

lungo ogni estremale dell'integrale azione $F(x)$, i.e. l'energia totale è conservata lungo ogni soluzione $x(t)$ della eq. di Newton $m\ddot{x} = -\nabla V(x)$ $\square$

$*$ $\forall\, \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$; la convessità di $f(\cdot,\cdot)$ dipenderà dalla forma di $V(x)$.

Caso (3.b): f non convessa

Es. 3: Vediamo ora una famiglia di funzionali non convessi, in cui l'eq. di Eulero-Lagrange ha sempre almeno una soluzione ammissibile (mentre per certi valori del parametro ne ha infinite). Vedremo però che, a seconda dei valori del parametro λ, possiamo avere 1, infinite o nessuna soluzione del problema variazionale.

OSS. usiamo solo (EE)

Consideriamo, per $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(u,\xi) = (\xi^2 - \lambda^2 u^2)$ i problemi

$$(P_\lambda) \qquad \inf_{u \in X} F_\lambda(u) \qquad F_\lambda(u) = \int_0^\pi \left[(u'(x))^2 - \lambda^2 u^2(x)\right] dx$$

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,\pi]) : u(0) = u(\pi) = 0\}$$

Osserviamo che $(u,\xi) \longmapsto f_\lambda(u,\xi)$ non è convessa.

L'eq. di Eulero-Lagrange si scrive

$$u'' + \lambda^2 u = 0 \quad \text{in } [0,\pi].$$

La sua soluzione generale è $u(x) = c_1 \cos\lambda x + c_2 \operatorname{sen}\lambda x$ $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Imponendo le condizioni al bordo si trova sempre la soluzione "banale" $u_0(x) = 0 \ \forall x \in [0,\pi]$.

Inoltre, se $\lambda = k$, $k \in \mathbb{Z}$ allora anche le funzioni $u_0(x) = c \operatorname{sen}\lambda x$ $(c \in \mathbb{R})$ sono soluzioni, altrimenti c'è solo la soluzione banale.

Mostriamo che:

- se $\lambda^2 < 1$, la soluzione $u_0(x) \equiv 0$ è l'unico pt. di minimo di F_λ;
- se $\lambda^2 = 1$, le infinite soluzioni del tipo $u_0(x) = c \operatorname{sen} x$, $c \in \mathbb{R}$, sono tutti e soli i minimi assoluti;
- se $\lambda^2 > 1$, il funzionale non è nemmeno inferiormente

limitato : le soluzioni dell'eq. di Eulero-Lagrange non sono minimi !!

Per dimostrare queste affermazioni abbiamo bisogno della seguente disuguaglianza :

Proposizione (Disuguaglianza di Poincaré - Wirtinger) :
Sia $u \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ t.c. $u(0) = u(\pi) = 0$. Allora

$$\int_0^\pi (u(x))^2 dx \leq \int_0^\pi (u'(x))^2 dx$$

con $=$ se e solo se $u(x) = c \sin x$, $c \in \mathbb{R}$.

Dim. Estendiamo u ad una funzione dispari definita anche in $[-\pi, 0[$, ed estendiamola poi ulteriormente ad una funzione 2π-periodica su tutto $\mathbb{R}$. Allora u rimane una funzione $\mathcal{C}^1$-a tratti grazie alle condizioni al contorno. Una tale funzione e la sua derivata hanno la serie di Fourier che converge in L^2 : possiamo scrivere

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \qquad u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \cos(nx)$$

con $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(x) \sin(nx) dx$ e si ha (identità di Parseval)

$$\int_0^\pi (u(x))^2 dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 \qquad \int_0^\pi (u'(x))^2 dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 b_n^2 .$$

Ovviamente, confrontando le due serie si ottiene la disuguaglianza desiderata. Essa si ridurrà un'uguaglianza $\Leftrightarrow$ $b_n = 0$ $\forall n \geq 2$, e quindi $u(x) = c \sin x$, $c \in \mathbb{R}$

$\square$

Proviamo allora quanto asserito sopra:

- se $\lambda^2 \leq 1$, usando la disug. di Poincaré-Wirtinger abbiamo

$$F_\lambda(u) = \int_0^\pi \left[(u'(x))^2 - \lambda^2 (u(x))^2\right] dx \geq \int_0^\pi \left[(u'(x))^2 - (u(x))^2\right] dx \geq 0$$

$\forall\, u \in X$, e quindi $F_\lambda(u) \geq 0 \quad \forall u \in X$.

In particolare

— se $\lambda^2 < 1$, $F_\lambda(u) \geq 0$ e $= 0 \iff u_0(x) \equiv 0$

— se $\lambda^2 = 1$, $F_\lambda(u) \geq 0$ e $= 0 \iff u_0(x) = c \operatorname{sen} x$ $\forall c \in \mathbb{R}$.

- se $\lambda^2 > 1$, allora $\inf_{u \in X} F_\lambda(u) = -\infty$. Infatti, considerando in $F_\lambda(u)$ le funzioni $u_c = c \operatorname{sen} x \in X$

$$F_\lambda(u_c) = c^2 \int_0^\pi \left[(\cos x)^2 - \lambda^2 (\operatorname{sen} x)^2\right] dx$$

$$= c^2 \frac{\pi}{2} \cdot \underbrace{(1-\lambda^2)}_{<0} \xrightarrow[\text{per } c \to +\infty]{} -\infty$$

$\square$

<u>OSS.</u> Supponiamo che $f \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R})$ e $f(x,u,\xi) = f(u,\xi)$.
Abbiamo visto che se $u \in \mathcal{C}^2([a,b])$ è soluzione dell'eq. di Eulero-Lagrange (EE), allora $\Phi(u,u') \doteq f(u,u') - u' f_\xi(u,u') \equiv \text{cost}$ su $[a,b]$.
Vale anche il viceversa?
Notiamo che le due equazioni sono equivalenti se cerchiamo soluzioni <u>non costanti</u> di $\Phi(u,u') = \text{cost}$ su $[a,b]$. Infatti, abbiamo (vedi dim. Prop. pag. 43)

$$\frac{d}{dx}\left[f(u,u') - u' f_\xi(u,u')\right] = u'\left[f_u(u,u') - \frac{d}{dx}\left[f_\xi(u,u')\right]\right]$$

quindi se $u' \neq 0$ su $[a,b]$, u è estremale di $F \iff \Phi(u,u') \equiv \text{cost}$