

COGNOME \_\_\_\_\_

NOME \_\_\_\_\_

MATRICOLA 

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

A

1	2	3	4	5	6

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 8 GENNAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE**.

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematica la seguente proposizione  $\mathcal{A}$  = "C'è almeno una sessione d'esami nella quale tutti gli studenti iscritti alla Facoltà di Scienze Cognitive hanno superato almeno un esame".

Scrivete in matematica la proposizione **non** $\mathcal{A}$  portando il **non** il più internamente possibile. Scrivete in italiano corrente la proposizione **non** $\mathcal{A}$ .

- ii) a) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 3\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{2x + 2} \leq 1\},$$

e rappresentateli sulla retta reale.

- b) Determinate gli insiemi  $A \cup B$  e  $A \cap B$ .

- c) Rappresentate graficamente l'insieme  $A \times B$ .

- 2) Date la parabola di equazione  $y + 2x^2 + 4x = 0$  e la circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

- i) rappresentatele nel piano cartesiano;

- ii) e detto  $V$  il vertice della parabola e  $C$  il centro della circonferenza, determinate l'equazione della retta  $r$  passante per  $V$  e per  $C$ .

- iii) Scrivete l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $C$ .

- iv) Rappresentate le rette  $r$  e  $r'$  nello stesso sistema di riferimento della parabola e della circonferenza.

3) i) Risolvete in  $\mathbb{R}$  le seguenti disequazioni:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} \cdot 2^x}{2^{-|x|}} \geq \frac{1}{4}; \quad \log_2(x+1) \cdot \log_3\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 0.$$

ii) Rappresentate graficamente, nel loro insieme di definizione, le funzioni

$$x \mapsto \left| \frac{1}{(x-1)^2} - 1 \right| \quad x \mapsto \left| \log_{\frac{1}{2}} |x| + 1 \right|.$$

---

4) Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2\sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 3^{x-1} + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano  $f$  e la sua inversa  $f^{-1}$  (motivando l'esistenza di  $f^{-1}$ ).

ii) Dite se  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass sull'intervallo  $[0, 3]$ . E su  $[-1, 1]$ ? Determinate, se esistono, i minimi e/o i massimi locali di  $f$  su  $[-1, 1]$ . Indicate anche gli eventuali punti di minimo e/o di massimo locali.

iii) Calcolate  $\sum_{n=1}^4 f((-1)^n n)$ .

iv) Calcolate  $\int_0^2 f(x) dx$ .

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente  $r$  al grafico di  $f$  nel punto  $(2, \frac{1}{4})$ . Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della  $f$ .

iii) Provate che  $f(x) = \frac{-x-1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$ .

iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di  $f$ , dalla retta tangente  $r$  e dalla retta  $x = 3$ .

---

6) Dite in quanti modi potete disporre in fila 8 palline blu, 4 palline rosse e 3 palline gialle se nei primi due posti dovete mettere 2 palline blu e nell'ultimo posto una pallina gialla.

---

COGNOME \_\_\_\_\_

NOME \_\_\_\_\_

MATRICOLA 

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

B

1	2	3	4	5	6

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 8 GENNAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE**.

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematica la seguente proposizione  $\mathcal{A}$  = "In tutte le sessioni d'esami c'è almeno uno studente iscritto alla Facoltà di Scienze Cognitive che supera tutti gli esami ai quali si presenta".

Scrivete in matematica la proposizione **non** $\mathcal{A}$  portando il **non** il più internamente possibile. Scrivete in italiano corrente la proposizione **non** $\mathcal{A}$ .

- ii) a) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \geq 3\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{2x + 2} < 1\},$$

e rappresentateli sulla retta reale.

- b) Determinate gli insiemi  $A \cup B$  e  $A \cap B$ .

- c) Rappresentate graficamente l'insieme  $A \times B$ .

- 2) Date la parabola di equazione  $y - 2x^2 + 4x = 0$  e la circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$

- i) rappresentatele nel piano cartesiano;

- ii) e detto  $V$  il vertice della parabola e  $C$  il centro della circonferenza, determinate l'equazione della retta  $r$  passante per  $V$  e per  $C$ .

- iii) Scrivete l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $C$ .

- iv) Rappresentate le rette  $r$  e  $r'$  nello stesso sistema di riferimento della parabola e della circonferenza.

3) i) Risolvete in  $\mathbb{R}$  le seguenti disequazioni:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} \cdot 3^x}{3^{-|x|}} < \frac{1}{9}; \quad \log_2(x+1) \cdot \log_3\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

ii) Rappresentate graficamente, nel loro insieme di definizione, le funzioni

$$x \mapsto \left| \frac{1}{(x-1)^3} - 1 \right| \quad x \mapsto \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 2 \right|.$$

---

4) Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \log_2 x + 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano  $f$  e la sua inversa  $f^{-1}$  (motivando l'esistenza di  $f^{-1}$ ).

ii) Dite se  $f$  soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass sull'intervallo  $] -1, 2]$ . E su  $[-1, 2]$ ? Determinate, se esistono, i minimi e/o i massimi locali di  $f$  su  $[-1, 2]$ . Indicate anche gli eventuali punti di minimo e/o di massimo locali.

iii) Calcolate  $\sum_{n=1}^4 f\left((-1)^n \frac{1}{n}\right)$ .

iv) Calcolate  $\int_{-1}^1 (f(x))^2 dx$ .

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x^3}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente  $r$  al grafico di  $f$  nel punto  $(2, -\frac{1}{4})$ . Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della  $f$ .

iii) Provate che  $f(x) = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x-1}$ .

iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di  $f$ , dalla retta tangente  $r$  e dalla retta  $x = 3$ .

---

6) Dite in quanti modi potete disporre in fila 8 palline rosse, 4 palline blu e 3 palline gialle se nei primi due posti dovete mettere 2 palline blu e nell'ultimo posto una pallina rossa.

---