

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 8 GENNAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematiche la seguente proposizione \mathcal{A} = "C'è almeno una sessione d'esami nella quale tutti gli studenti iscritti alla Facoltà di Scienze Cognitive hanno superato almeno un esame".

Scrivete in matematiche la proposizione **non** \mathcal{A} portando il **non** il più internamente possibile. Scrivete in italiano corrente la proposizione **non** \mathcal{A} .

- ii) a) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 3\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{2x + 2} \leq 1\},$$

e rappresentateli sulla retta reale.

- b) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$.

- c) Rappresentate graficamente l'insieme $A \times B$.

- 2) Date la parabola di equazione $y + 2x^2 + 4x = 0$ e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

- i) rappresentatele nel piano cartesiano;

- ii) e detto V il vertice della parabola e C il centro della circonferenza, determinate l'equazione della retta r passante per V e per C .

- iii) Scrivete l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per C .

- iv) Rappresentate le rette r e r' nello stesso sistema di riferimento della parabola e della circonferenza.

3) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} \cdot 2^x}{2^{-|x|}} \geq \frac{1}{4}; \quad \log_2(x+1) \cdot \log_3\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 0.$$

ii) Rappresentate graficamente, nel loro insieme di definizione, le funzioni

$$x \mapsto \left| \frac{1}{(x-1)^2} - 1 \right| \quad x \mapsto \left| \log_{\frac{1}{2}} |x| + 1 \right|.$$

4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2\sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 3^{x-1} + 1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e la sua inversa f^{-1} (motivando l'esistenza di f^{-1}).

ii) Dite se f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass sull'intervallo $[0, 3]$. E su $[-1, 1]$? Determinate, se esistono, i minimi e/o i massimi locali di f su $[-1, 1]$. Indicate anche gli eventuali punti di minimo e/o di massimo locali.

iii) Calcolate $\sum_{n=1}^4 f((-1)^n n)$.

iv) Calcolate $\int_0^2 f(x) dx$.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(2, \frac{1}{4})$. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .

iii) Provate che $f(x) = \frac{-x-1}{x^2} + \frac{1}{x-1}$.

iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta tangente r e dalla retta $x = 3$.

6) Dite in quanti modi potete disporre in fila 8 palline blu, 4 palline rosse e 3 palline gialle se nei primi due posti dovete mettere 2 palline blu e nell'ultimo posto una pallina gialla.

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 8 GENNAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematiche la seguente proposizione $\mathcal{A} = \text{"In tutte le sessioni d'esami c'è almeno uno studente iscritto alla Facoltà di Scienze Cognitive che supera tutti gli esami ai quali si presenta"}$.

Scrivete in matematiche la proposizione **non** \mathcal{A} portando il **non** il più internamente possibile. Scrivete in italiano corrente la proposizione **non** \mathcal{A} .

- ii) a) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \geq 3\} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{2x + 2} < 1\right\},$$

e rappresentateli sulla retta reale.

- b) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$.

- c) Rappresentate graficamente l'insieme $A \times B$.

- 2) Date la parabola di equazione $y - 2x^2 + 4x = 0$ e la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$

- i) rappresentatele nel piano cartesiano;

- ii) e detto V il vertice della parabola e C il centro della circonferenza, determinate l'equazione della retta r passante per V e per C .

- iii) Scrivete l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per C .

- iv) Rappresentate le rette r e r' nello stesso sistema di riferimento della parabola e della circonferenza.

3) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} \cdot 3^x}{3^{-|x|}} < \frac{1}{9}; \quad \log_2(x+1) \cdot \log_3\left(x + \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

ii) Rappresentate graficamente, nel loro insieme di definizione, le funzioni

$$x \mapsto \left| \frac{1}{(x-1)^3} - 1 \right| \quad x \mapsto \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 2 \right|.$$

4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \log_2 x + 1 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e la sua inversa f^{-1} (motivando l'esistenza di f^{-1}).

ii) Dite se f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass sull'intervallo $[-1, 2]$. E su $[-1, 2]$? Determinate, se esistono, i minimi e/o i massimi locali di f su $[-1, 2]$. Indicate anche gli eventuali punti di minimo e/o di massimo locali.

iii) Calcolate $\sum_{n=1}^4 f((-1)^n \frac{1}{n})$.

iv) Calcolate $\int_{-1}^1 (f(x))^2 dx$.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x^3}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(2, -\frac{1}{4})$. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .

iii) Provate che $f(x) = \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x-1}$.

iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f , dalla retta tangente r e dalla retta $x = 3$.

6) Dite in quanti modi potete disporre in fila 8 palline rosse, 4 palline blu e 3 palline gialle se nei primi due posti dovete mettere 2 palline blu e nell'ultimo posto una pallina rossa.
