

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 10 SETTEMBRE 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) Sia C il centro della circonferenza \mathcal{C} di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$.
- Determinate l'equazione della retta verticale e l'equazione della retta orizzontale passante per C .
 - Determinate l'equazione dell'ellisse \mathcal{E} di centro C e semiassi $a = 3$ e $b = 4$.
 - Rappresentate graficamente nel piano cartesiano \mathcal{C} e \mathcal{E} .

- 2) Date le funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f(x) = e^{x^2+x}$ e $g(x) = x+1$, poniamo

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \int_0^x g(t) dt \leq \frac{3}{2}\}$$

(si ricorda che $f'(x)$ denota la derivata prima di f).

- Determinate gli insiemi A e B e rappresentateli sulla retta reale.
- Rappresentate graficamente l'insieme $A \times B$ e l'insieme $A \times \{1\}$.
- Dite se A è un insieme limitato o non, se è un intervallo o non.

3) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{se } x < 0 \\ -x^3 + 1 & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 2 \log_2 x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g .
 - ii) Rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto |f(x) - 1|$ e $x \mapsto |g(x)| - 1$.
 - iii) Determinate, se esistono, $(f \circ g)(-1)$ e $(g \circ f)(1)$.
 - iv) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $g(x) = k$.
 - v) Determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo di g su $[0, 2]$. Individuate anche gli eventuali punti di massimo e/o punti di minimo.
-

4) i) Calcolate $\int_1^2 (e^{-x} + \frac{1}{x^2}) dx$ e $\int_e^{2e} \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx$.

ii) Calcolate, al variare di $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^k + e^{-x}}{x^{-1} + 2x^2}$.

iii) Calcolate $\sum_{n=3}^6 \frac{(n-2)!}{n}$.

5) i) Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione continua definita da $g(x) = 2x^3 + 12x - 4$.

a) Calcolate $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b) Provate che g è strettamente monotona.

c) Verificate che esiste un (unico!) punto $x_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ tale che $g(x_0) = 0$. Rappresentate graficamente sulla retta reale il segno di g .

ii) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}.$$

Usando il punto i) studiate la convessità/concavità della funzione f e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 10 SETTEMBRE 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) Date le funzioni $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f(x) = e^{x^2-x}$ e $g(x) = x + 1$, poniamo

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) \leq 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \int_0^x g(t) dt < \frac{3}{2}\}$$

(si ricorda che $f'(x)$ denota la derivata prima di f).

- i) Determinate gli insiemi A e B e rappresentateli sulla retta reale.
- ii) Rappresentate graficamente l'insieme $A \times B$ e l'insieme $\{1\} \times A$.
- iii) Dite se B è un insieme limitato o non. Dite se A è un intervallo o non.

- 2) Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{3}\right)^x & \text{se } x < 0 \\ x^3 + 1 & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ 3 \log_2 x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g .
- ii) Rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto |f(x) - 1|$ e $x \mapsto |g(x)| - 1$.
- iii) Determinate, se esistono, $(f \circ g)(-1)$ e $(g \circ f)(1)$.
- iv) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $g(x) = k$.
- v) Determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo di g su $[0, 2]$. Individuate anche gli eventuali punti di massimo e/o punti di minimo.

- 3) Sia C il centro della circonferenza \mathcal{C} di equazione $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$.
- Determinate l'equazione della retta verticale e l'equazione della retta orizzontale passante per C .
 - Determinate l'equazione dell'ellisse \mathcal{E} di centro C e semiassi $a = 4$ e $b = 3$.
 - Rappresentate graficamente nel piano cartesiano \mathcal{C} e \mathcal{E} .
-

- 4) i) Calcolate $\int_1^2 (e^{-x} + \frac{1}{x^3}) dx$ e $\int_e^{2e} \frac{x^2 - 4}{x + 2} dx$.
- ii) Calcolate, al variare di $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, il seguente limite: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^k + e^{-x}}{x^{-1} + 2x^3}$.
- iii) Calcolate $\sum_{n=3}^6 \frac{n}{(n-2)!}$.
-

- 5) i) Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione continua definita da $g(x) = 2x^3 + 12x + 4$.
- Calcolate $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
 - Provate che g è strettamente monotona.
 - Verificate che esiste un (unico!) punto $x_0 \in]-\frac{1}{2}, 0[$ tale che $g(x_0) = 0$. Rappresentate graficamente sulla retta reale il segno di g .
- ii) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}.$$

Usando il punto i) studiate la convessità/concavità della funzione f e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
