

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> </table>							<div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;">NON SCRIVERE QUI</div> <table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> <td style="width: 20px; height: 20px;"></td> </tr> </table> <div style="float: right; text-align: center; margin-top: 10px;"> <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100px; height: 70px;"> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">A</td> </tr> </table> </div>							A
A														

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
 CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
 CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 10 SETTEMBRE 2010

---

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

---

- 1) Sia  $C$  il centro della circonferenza  $\mathcal{C}$  di equazione  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ .
- i) Determinate l'equazione della retta verticale e l'equazione della retta orizzontale passante per  $C$ .
  - ii) Determinate l'equazione dell'ellisse  $\mathcal{E}$  di centro  $C$  e semiassi  $a = 3$  e  $b = 4$ .
  - iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{E}$ .
- 

- 
- 2) Date le funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $f(x) = e^{x^2+x}$  e  $g(x) = x + 1$ , poniamo

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \int_0^x g(t) dt \leq \frac{3}{2}\}$$

(si ricorda che  $f'(x)$  denota la derivata prima di  $f$ ).

- i) Determinate gli insiemi  $A$  e  $B$  e rappresentateli sulla retta reale.
  - ii) Rappresentate graficamente l'insieme  $A \times B$  e l'insieme  $A \times \{1\}$ .
  - iii) Dite se  $A$  è un insieme limitato o non, se è un intervallo o non.
-

3) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x & \text{se } x < 0 \\ -x^3 + 1 & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 2 \log_2 x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano  $f$  e  $g$ .
  - ii) Rappresentate graficamente le funzioni  $x \mapsto |f(x) - 1|$  e  $x \mapsto |g(x)| - 1$ .
  - iii) Determinate, se esistono,  $(f \circ g)(-1)$  e  $(g \circ f)(1)$ .
  - iv) Determinate, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il numero delle soluzioni dell'equazione  $g(x) = k$ .
  - v) Determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo di  $g$  su  $[0, 2]$ . Individuate anche gli eventuali punti di massimo e/o punti di minimo.
- 

---

4) i) Calcolate  $\int_1^2 (e^{-x} + \frac{1}{x^2}) dx$  e  $\int_e^{2e} \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx$ .

ii) Calcolate, al variare di  $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , il seguente limite:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^k + e^{-x}}{x^{-1} + 2x^2}$ .

iii) Calcolate  $\sum_{n=3}^6 \frac{(n-2)!}{n}$ .

---

---

5) i) Sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione continua definita da  $g(x) = 2x^3 + 12x - 4$ .

a) Calcolate  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .

b) Provate che  $g$  è strettamente monotona.

c) Verificate che esiste un (unico!) punto  $x_0 \in ]0, \frac{1}{2}[$  tale che  $g(x_0) = 0$ . Rappresentate graficamente sulla retta reale il segno di  $g$ .

ii) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - x - 2}.$$

Usando il punto i) studiate la convessità/concavità della funzione  $f$  e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

---

COGNOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_  
MATRICOLA 

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 10 SETTEMBRE 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

**È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti;** al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

**Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio.** Non usate il colore rosso.

- 1) Date le funzioni  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $f(x) = e^{x^2-x}$  e  $g(x) = x + 1$ , poniamo

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f'(x) \leq 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \int_0^x g(t) dt < \frac{3}{2}\}$$

(si ricorda che  $f'(x)$  denota la derivata prima di  $f$ ).

- i) Determinate gli insiemi  $A$  e  $B$  e rappresentateli sulla retta reale.
- ii) Rappresentate graficamente l'insieme  $A \times B$  e l'insieme  $\{1\} \times A$ .
- iii) Dite se  $B$  è un insieme limitato o non. Dite se  $A$  è un intervallo o non.

- 2) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -(\frac{1}{3})^x & \text{se } x < 0 \\ x^3 + 1 & \text{se } x \geq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ 3 \log_2 x & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano  $f$  e  $g$ .
- ii) Rappresentate graficamente le funzioni  $x \mapsto |f(x) - 1|$  e  $x \mapsto |g(x)| - 1$ .
- iii) Determinate, se esistono,  $(f \circ g)(-1)$  e  $(g \circ f)(1)$ .
- iv) Determinate, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , il numero delle soluzioni dell'equazione  $g(x) = k$ .
- v) Determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo di  $g$  su  $[0, 2]$ . Individuate anche gli eventuali punti di massimo e/o punti di minimo.

- 3) Sia  $C$  il centro della circonferenza  $\mathcal{C}$  di equazione  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ .
- i) Determinate l'equazione della retta verticale e l'equazione della retta orizzontale passante per  $C$ .
  - ii) Determinate l'equazione dell'ellisse  $\mathcal{E}$  di centro  $C$  e semiassi  $a = 4$  e  $b = 3$ .
  - iii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{E}$ .
- 

- 4) i) Calcolate  $\int_1^2 (e^{-x} + \frac{1}{x^3}) dx$  e  $\int_e^{2e} \frac{x^2 - 4}{x + 2} dx$ .
- ii) Calcolate, al variare di  $k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , il seguente limite:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^k + e^{-x}}{x^{-1} + 2x^3}$ .
- iii) Calcolate  $\sum_{n=3}^6 \frac{n}{(n-2)!}$ .
- 

- 5) i) Sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione continua definita da  $g(x) = 2x^3 + 12x + 4$ .
- a) Calcolate  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
  - b) Provate che  $g$  è strettamente monotona.
  - c) Verificate che esiste un (unico!) punto  $x_0 \in ]-\frac{1}{2}, 0[$  tale che  $g(x_0) = 0$ . Rappresentate graficamente sulla retta reale il segno di  $g$ .
- ii) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x - 2}.$$

Usando il punto i) studiate la convessità/concavità della funzione  $f$  e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

---