

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2009/10 - ESAME SCRITTO (1° Appello) - Rovereto, 8 gennaio 2010

FILA (A)

1) Consideriamo il predicato di tre variabili x, y, z come segue

$A(x, y, z) =$ "Nella sessione d'esami x lo studente y iscritto alla Facoltà di Scienze Cognitive ha superato l'esame z "; allora la proposizione data

$$A \Leftrightarrow [\exists x : \forall y, \exists z : A(x, y, z)].$$

$$\text{Ne segue } \text{non } A = \text{non} [\exists x : \forall y, \exists z : A(x, y, z)] \\ = \forall x, \exists y : \forall z, \text{non } A(x, y, z).$$

Possiamo allora scrivere $\text{non } A =$ "In ogni sessione d'esami c'è almeno uno studente iscritto alla Facoltà di Scienze Cognitive che non supera nessun esame." $\square$

$$\text{ii) a) } A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 3\} : \quad |x^2 - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x^2 - 1 < 3 \\ =]-2, 2[; \quad \Leftrightarrow -2 < x^2 < 4.$$

Poiché $x^2 > -2$ è sempre vera, basta avere $x^2 < 4$, ossia $-2 < x < 2$.

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{2x + 2} \leq 1\} : \quad \frac{x^2 - 1}{2x + 2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{2x + 2} - 1 \leq 0 \\ =]-\infty, 3] \setminus \{-1\}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 1 - 2x - 2}{2x + 2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{2x + 2} \leq 0$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} + & + & - & - & - & - & - & + & & & \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & & \end{array} \quad x^2 - 2x - 3$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} - & - & + & + & + & + & + & + & & & \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & & \end{array} \quad 2x + 2$$

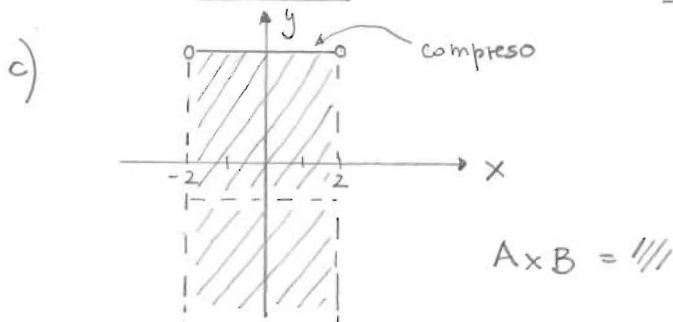
$$\begin{array}{ccccccccccc} - & - & - & - & - & - & - & + & & & \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & & \end{array} \quad \frac{x^2 - 2x - 3}{2x + 2}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & & & \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & \end{array} \quad A =]-2, 2[$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & & & \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & \end{array} \quad B =]-\infty, 3] \setminus \{-1\}$$

$\square$

b) $A \cup B =]-\infty, 3]$; $A \cap B =]-2, 2[\setminus \{-1\}$. □



2) $y = -2x^2 - 4x$
 $= -2(x^2 + 2x)$
 $y = -2(x+1)^2 + 2$
 $V = (-1, 2)$

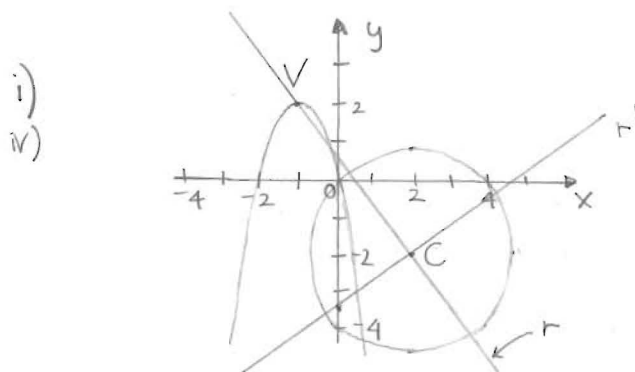
$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$$

$$x^2 - 4x + y^2 + 4y = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+2)^2 - 4 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$$

$$C = (2, -2) \quad r = 2\sqrt{2}$$



ii) $V = (-1, 2) \quad C = (2, -2)$: l'eq. della retta passante per V e C è
 data da $\frac{y-2}{-2-2} = \frac{x+1}{2+1} \Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}}}$. □

iii) $y = -2 + \frac{3}{4}(x-2) \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}}}$. ■

3)i) $\frac{(\frac{1}{2})^{x^2-1} \cdot 2^x}{2^{-|x|}} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-x^2+1} \cdot 2^x \cdot 2^{|x|} \geq 2^{-2}$
 $\Leftrightarrow 2^{-x^2+1+x+|x|} \geq 2^{-2}$
 $\Leftrightarrow -x^2+1+x+|x| \geq -2 \quad (2^x \nearrow)$

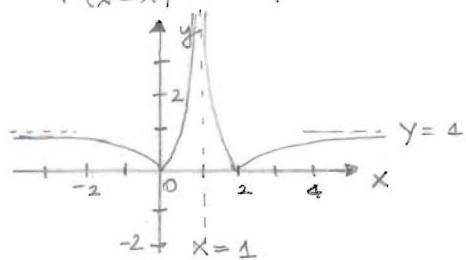
(vedi FILA (A)(B)
 3^a Prova Intermedia Es. 1)

$\Rightarrow \underline{\underline{S = [-\sqrt{3}, 3]}}$

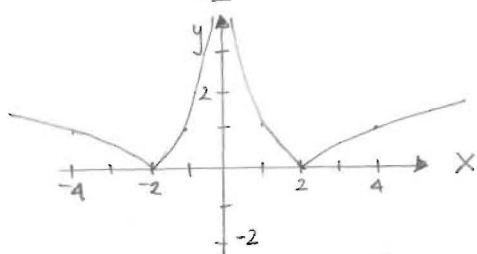
$\log_2(x+1) \cdot \log_3(x+\frac{1}{2}) \leq 0 \Rightarrow \underline{\underline{S = [0, \frac{1}{2}]}}$. □

(vedi FILA (A), 3^a Prova Intermedia
 Es. 1)

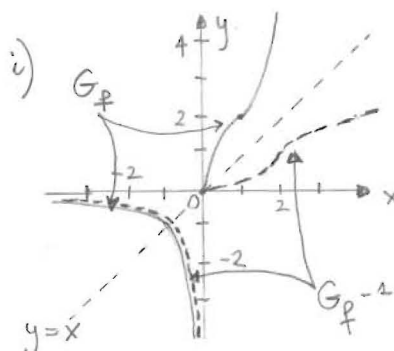
ii) $x \mapsto \left| \frac{1}{(x-1)^2} - 1 \right|$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.



$x \mapsto |\log_{1/2} |x| + 1|$ è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ 2\sqrt{x} & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 3^{x-1} + 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$



f è iniettiva e suriettiva e quindi

$\exists f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ii) f è continua su $[0, 3]$: quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass. Notiamo che su $[-1, 1]$ non è soddisfatta l'ipotesi di continuità di f : infatti $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ (quindi $\nexists$ finito $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$).

- -1 è massimo loc. di f su $[-1, 1]$ e $x = -1$ è pt. di max. loc.
- 2 è massimo loc. (anche assoluto) di f su $[-1, 1]$ e $x = 1$ è pt. di max. loc.
- Non sono minimi locali di f su $[-1, 1]$.

iii) $\sum_{n=1}^4 f((-1)^n n) = f(-1) + f(2) + f(-3) + f(4) = (-1) + (3+1) + (-\frac{1}{3}) + (3^3+1) = -1 + 4 - \frac{1}{3} + 28 = 31 - \frac{1}{3} = \frac{92}{3}$.

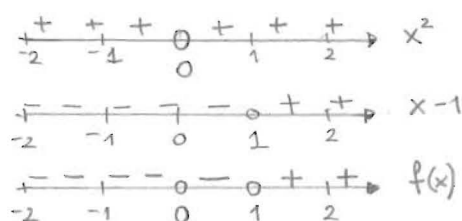
iv) $\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 2\sqrt{x} dx + \int_1^2 (3^{x-1} + 1) dx = 2 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{3^x}{\log 3} + x \right]_1^2 =$

$$= \frac{4}{3} + \left(\frac{3}{\log 3} + 2\right) - \left(\frac{1}{\log 3} + 1\right) = \underline{\underline{\frac{7}{3} + \frac{2}{\log 3}}}$$

5) i) $f(x) = \frac{1}{x^3 - x^2}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

$$= \frac{1}{x^2(x-1)}$$

• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$y=0$ asint. orizzont. per f , per $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

$x=0$ asint. vert. per f

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

$x=1$ asint. vert. per f

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

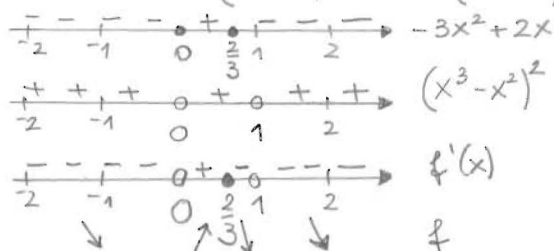
$y=0$ asint. orizzont. per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, essendo rapporto di funz. continue.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ $f'(x) = \frac{-3x^2 + 2x}{(x^3 - x^2)^2} = \frac{x(-3x+2)}{(x^3 - x^2)^2}$

$x = \frac{2}{3}$ pt. critico per f ;
è un max. loc. relativo

$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{27}{4} = -6\frac{3}{4}$



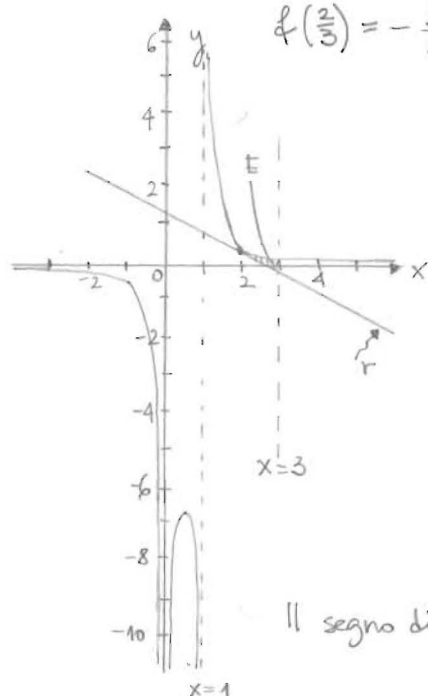
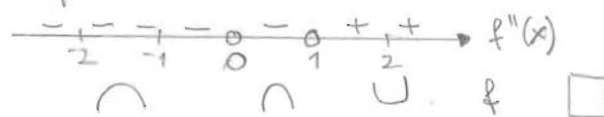
• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ $f''(x) = \frac{(-6x+2)(x^3-x^2)^2 - (-3x^2+2x)2(x^3-x^2)(3x^2-2x)}{(x^3-x^2)^4}$

$$= \frac{x^2(-6x+2)(x-1) + 2(3x^2-2x)^2}{(x^3-x^2)^3}$$

$$= \frac{x^2[-6x^2+8x-2+18x^2-24x+8]}{(x^3-x^2)^3}$$

$$= \frac{x^2[12x^2-16x+6]}{(x^3-x^2)^3}$$

Il segno di f'' è quindi quello della f



$$ii) y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x-2)$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(x-2)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

□

$$iii) \frac{-x-1}{x^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{(-x-1)(x-1) + x^2}{x^2(x-1)} = \frac{\cancel{-x^2} + \cancel{x} - \cancel{x} + 1 + x^2}{x^2(x-1)} = f(x)$$

□

$$iv) \text{area } E = \int_2^3 \left(f(x) + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \right) dx = \int_2^3 \left(\frac{-x-1}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \right) dx =$$

$$= \int_2^3 \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4} \right) dx = \left[-\log|x| + \frac{1}{x} + \log|x-1| + \frac{x^2}{4} - \frac{5}{4}x \right]_2^3 =$$

$$= \left(-\log 3 + \frac{1}{3} + \log 2 + \frac{9}{4} - \frac{15}{4} \right) - \left(-\log 2 + \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{2} \right)$$

$$= -\log 3 + 2\log 2 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \log \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$$

■

$$6) P_{12}^{6,4,2} = \frac{12!}{6!4!2!}$$

■

FILA (B)

1)i) Consideriamo il predicato di tre variabili x, y, z come segue

$A(x, y, z)$ = "Nella sessione d'esami x lo studente y iscritto alla Facoltà di Scienze Cognitive supera l'esame z al quale si presenta"; allora la proposizione data $A \Leftrightarrow [\forall x, \exists y: \forall z, A(x, y, z)]$.

$$\text{Ne segue } \text{non } A = \text{non } [\forall x, \exists y: \forall z, A(x, y, z)]$$

$$= \exists x: \forall y, \exists z: \text{non } A(x, y, z).$$

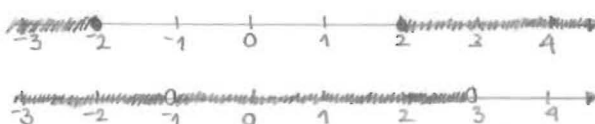
Possiamo allora scrivere $\text{non } A$ = "C'è almeno una sessione d'esami, nella quale tutti gli studenti iscritti alla Facoltà di Scienze Cognitive non superano almeno un esame al quale si presentano."

□

$$ii) a) A =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$$

vedi Esame scritto, FILA (A) Es. 1).

$$B =]-\infty, 3[\setminus \{-1\}$$



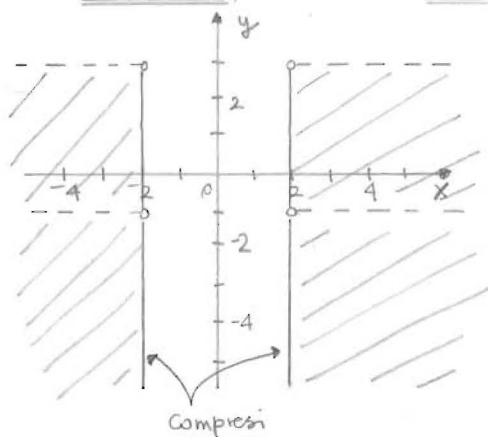
$A = \text{non}$

$B = \text{non}$

□

b) $A \cup B = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; $A \cap B =]-\infty, -2] \cup [2, 3[$.

c)

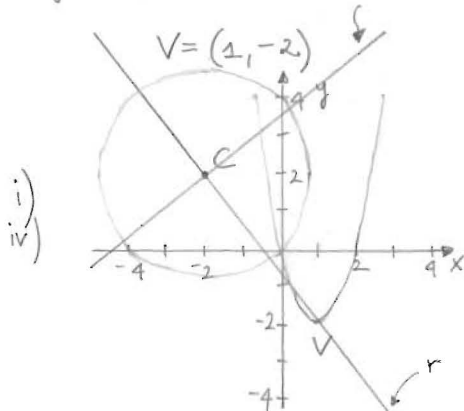


$A \times B = //$

2) $y = 2x^2 - 4x$

$= 2(x^2 - 2x)$

$y = 2(x-1)^2 - 2$



$x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$

$x^2 + 4x + y^2 - 4y = 0$

$(x+2)^2 - 4 + (y-2)^2 - 4 = 0$

$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 8$

$C = (-2, 2) \quad r = 2\sqrt{2}$

i)
iv)

ii) $V = (1, -2) \quad C = (-2, 2)$: l'eq. della retta passante per V e C è

data da $\frac{y+2}{2+2} = \frac{x-1}{-2-1} \Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}}}$.

iii) $y = 2 + \frac{3}{4}(x+2) \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}}}$.

3) i) $\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{x^2-1} \cdot 3^x}{3^{-|x|}} < \frac{1}{9}$

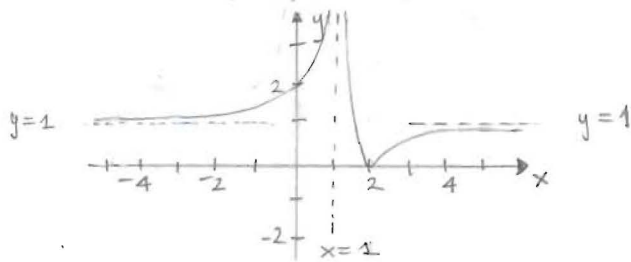
$S =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]3, +\infty[$. Vedi 3^a Prova Intermedia
FILA (A), Es. 1

$\log_2(x+1) \cdot \log_3\left(x+\frac{1}{2}\right) \geq 0$

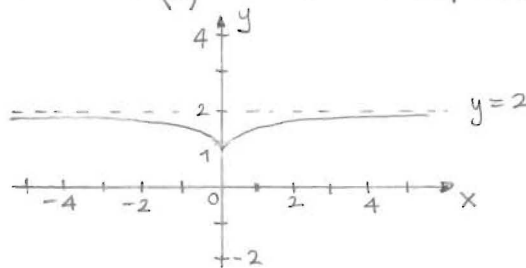
$S =]-\frac{1}{2}, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty[$.

Vedi 3^a Prova Intermedia
FILA (A), Es. 1

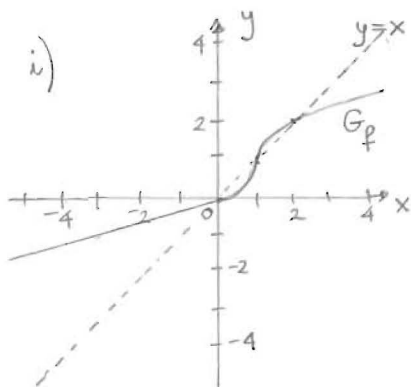
ii) $x \mapsto \left| \frac{1}{(x-1)^3} - 1 \right|$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$



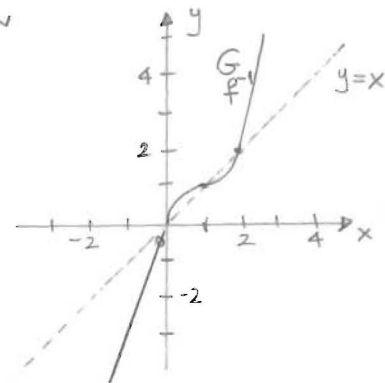
$x \mapsto \left| \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} - 2 \right|$ è definita su $\mathbb{R}$



4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \log_2 x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$



f è iniettiva e suriettiva e quindi
 $\exists f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



ii) f è continua in $]-1, 2]$;

$]-1, 2]$ è un intervallo limitato ma non è chiuso; non sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass. Sull'intervallo $[-1, 2]$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Weierstrass.

• $\min_{[-1, 2]} f = f(-1) = -\frac{1}{3}$

$x = -1$ è pt. di minimo loc. (e assoluto)
 di f in $[-1, 2]$;

• $\max_{[-1, 2]} f = f(2) = 2$

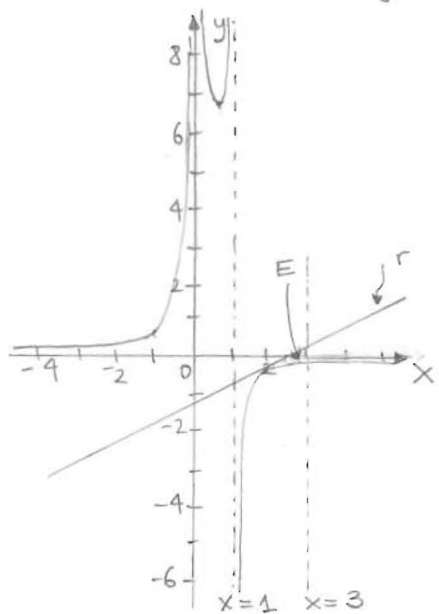
$x = 2$ è pt. di massimo loc. (e assoluto)
 di f in $[-1, 2]$. □

$$\text{iii)} \sum_{n=1}^4 f\left((-1)^n \frac{1}{n}\right) = f(-1) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ = -\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = -\frac{4}{9} + \frac{5}{16} = -\frac{19}{144} \quad \square$$

$$\text{iv)} \int_{-1}^1 (f(x))^2 dx = \int_{-1}^0 (f(x))^2 dx + \int_0^1 (f(x))^2 dx = \int_{-1}^0 \frac{x^2}{9} dx + \int_0^1 x^4 dx = \\ = \left[\frac{x^3}{27} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{27} + \frac{1}{5} = \frac{32}{135} \quad \blacksquare$$

5)i) $f(x) = \frac{1}{x^2 - x^3}$. Osserviamo che questa funzione corrisponde alla funzione in Es.5 FILA(A) cambiata di segno.

Abbiamo allora il seguente grafico qualitativo per f :



$$\text{ii)} y = -\frac{1}{4} + f'(2)(x-2) \\ = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x-2) \\ \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}}} \quad \square$$

$$\text{iii)} \frac{x+1}{x^2} - \frac{1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1) - x^2}{x^2(x-1)} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{x^2(x-1)} = \frac{-1}{x^2(x-1)} = f(x) \quad \square$$

$$\text{iv)} \text{area } E = \int_2^3 \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{4} - \frac{x+1}{x^2} + \frac{1}{x-1} \right) dx = \underline{\underline{\log \frac{4}{3} + \frac{1}{3}}} \quad (\text{vedi FILA(A), Es.5 iv)) \quad \square$$

$$6) P_{12}^{7,2,3} = \frac{12!}{7! 2! 3!} \quad \blacksquare$$