

Università degli studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2009/10 - TERZA PROVA INTERMEDIA - Rovereto, 8 gennaio 2010

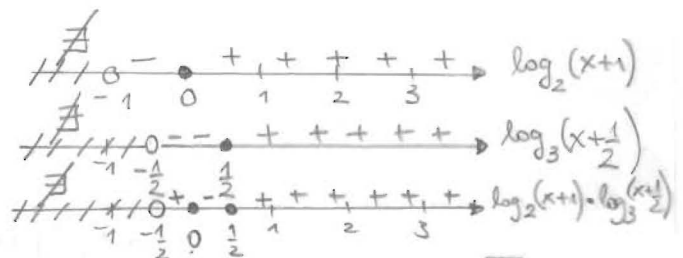
FILA (A)

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1} \cdot 3^x}{3^{-|x|}} &< \frac{1}{9} &\Leftrightarrow & 3^{-x^2+1} \cdot 3^x \cdot 3^{|x|} < 3^{-2} \\
 &\Leftrightarrow & 3^{-x^2+1+x+|x|} < 3^{-2} \\
 &\Leftrightarrow & -x^2+1+x+|x| < -2 & \quad (3^x \uparrow) \\
 &\Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 0 \\ -x^2+1+x+x < -2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ -x^2+1+x-x < -2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-2x-3 > 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 > 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow & \begin{cases} x \geq 0 \\ x < -1 \quad \text{or} \quad x > 3 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x < -\sqrt{3} \quad \text{or} \quad x > \sqrt{3} \end{cases} \\
 \Rightarrow & \underline{S =]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]3, +\infty[.} & \square
 \end{aligned}$$

$$\log_2(x+1) \cdot \log_3\left(x+\frac{1}{2}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+\frac{1}{2} > 0 \\ x+1 \geq 1 \\ x+\frac{1}{2} \geq 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+\frac{1}{2} > 0 \\ x+1 \leq 1 \\ x+\frac{1}{2} \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-\frac{1}{2}, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[.}$$



$$2) i) \quad \sum_{k=1}^5 \log_{\frac{1}{2}} 2^k = \sum_{k=1}^5 k \cdot \log_{\frac{1}{2}} 2 = \sum_{k=1}^5 (-k) = -1-2-3-4-5 = \underline{\underline{-15.}}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^n \cdot e^{1-n} = \sum_{n=2}^{\infty} e^{n+1-n} = \sum_{n=2}^{\infty} e = \underline{\underline{6e.}} \quad \square$$

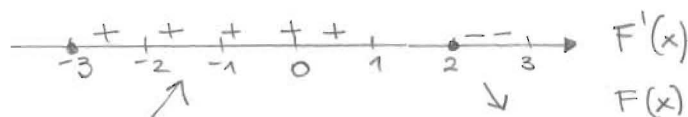
$$ii) \quad \sum_{n=1}^{22} \int_n^{n+(-1)^{n+1}\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx. \quad \square$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \int_{-4}^{-2} \left(\frac{x^2-1}{x} + e^{-2x} \right) dx &= \int_{-4}^{-2} \left(x - \frac{1}{x} - \frac{-2e^{-2x}}{2} \right) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \log|x| - \frac{e^{-2x}}{2} \right]_{-4}^{-2} = \left[2 - \log 2 - \frac{e^4}{2} \right] - \left[8 - \log 4 - \frac{e^8}{2} \right] \\ &= -6 + \log 2 + \frac{e^8 - e^4}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

iv) $G(x) = \frac{x^{5/4}}{5/4} + C$, $C \in \mathbb{R}$, sono tutte le primitive di $f(x) = \sqrt[4]{x}$.
Abbiamo $G(1) = 1$ se e solo se $\frac{4}{5} + C = 1$, ossia $C = \frac{1}{5}$.
La primitiva cercata è quindi $G(x) = \frac{4}{5}x^{5/4} + \frac{1}{5}$. ■

3) i) $F(x) = \int_{-3}^x f(t) dt$: $F(-3) = 0$, mentre $F(x) > 0 \quad \forall x \in]-3, 3]$. □

ii) Dal teorema fond. del calcolo integrale sappiamo che $F'(x) = f(x)$,
quindi il segno di $F'(x)$ è dato dal segno di $f(x)$:



Quindi in $[-3, 2]$ F è crescente e
in $[2, 3]$ F è decrescente.

A questo risultato si arriva anche banalmente usando l'interpretazione geom. di $F(x)$. Abbiamo

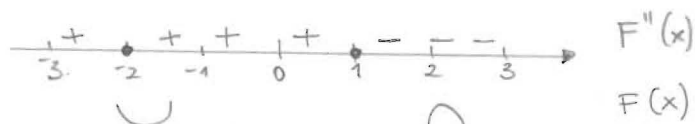
$$\min_{[-3,3]} F = F(-3) = 0 \quad x = -3 \text{ pt. di minimo per } F;$$

$$\max_{[-3,3]} F = F(2) \quad x = 2 \text{ pt. di massimo per } F;$$

$F(3)$ è inoltre minimo locale per F e $x = 3$ pt. di min. loc. per F . □

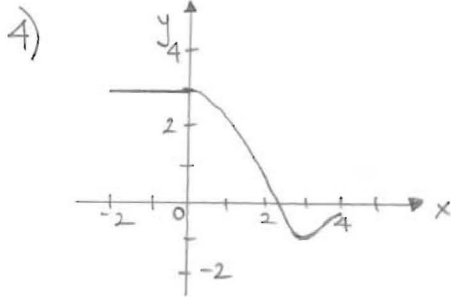
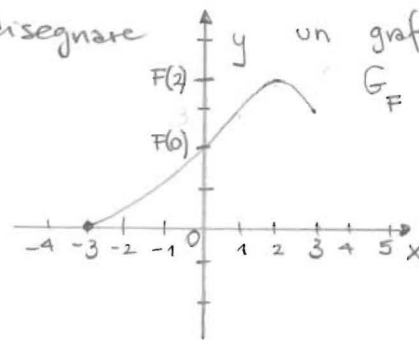
iii) Essendo f una funzione derivabile (non presenta cuspidi, pt. con tangente verticale o pt. angolosi) si ha $F''(x) = f'(x)$ in $] -3, 3[$.

Quindi



$x = 1$ pt. di flesso per F .

Possiamo allora disegnare un grafico qualitativo di F :



Esempio di funzione $f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile che soddisfa i), ii), iii).

5) i) $f(x) = \frac{1}{2x^2 - x^3} = \frac{1}{x^2(2-x)}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} =]-\infty, 0[\cup]0, 2[\cup]2, +\infty[$.

• segno di f

+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	x^2
-2	-1	0	1	2						
+	+	+	+	+	+	+	0	-	-	$2-x$
-2	-1	0	1	2						
+	+	+	+	0	+	+	0	-	-	f
-2	-1	0	1	2						

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asint. orizzont. per f , per $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$ $x=0$ asint. vert. per f

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ $x=2$ asint. vert. per f

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

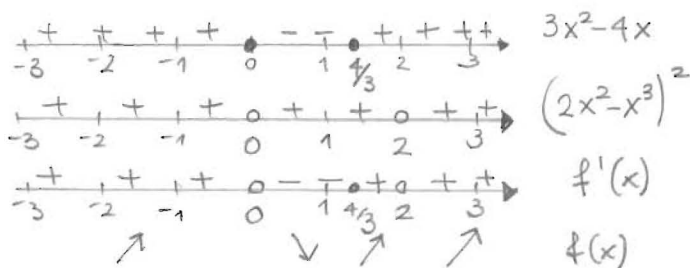
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ $y=0$ asint. orizzont. per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, essendo rapporto di funzioni continue.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ $f'(x) = \frac{-4x + 3x^2}{(2x^2 - x^3)^2} = \frac{x(-4 + 3x)}{(2x^2 - x^3)^2}$

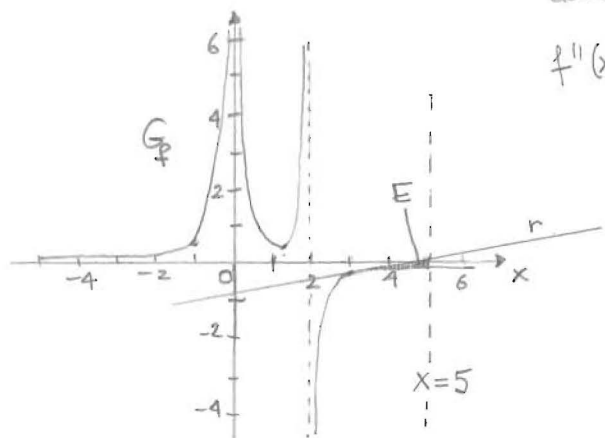
$x = \frac{4}{3}$ pt. critico per f ;
 è un min. loc. Shetha

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{27}{32} (< 1)$$

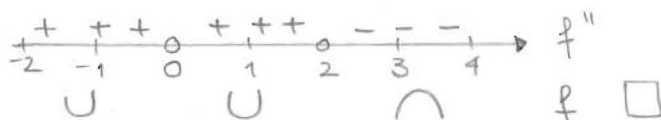


• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-4+6x)(2x^2-x^3)^2 - (-4x+3x^2)2(2x^2-x^3)(4x-3x^2)}{(2x^2-x^3)^4} \\ &= \frac{x^2(-4+6x)(2-x) + 2(4x-3x^2)^2}{(2x^2-x^3)^3} \\ &= \frac{x^2[-8+16x-6x^2+32-24x+18x^2]}{(2x^2-x^3)^3} \\ &= \frac{x^2[12x^2-8x+24]}{(2x^2-x^3)^3} = \frac{4x^2[3x^2-2x+6]}{(2x^2-x^3)^3} \end{aligned}$$



Il segno di f'' è quindi quello della f



$$\begin{aligned} \text{ii) } y &= -\frac{1}{9} + f'(3)(x-3) \\ &= \frac{5}{27}x - \frac{1}{9} - \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$$f'(3) = \frac{-12+27}{9^2} = \frac{15}{9^2} = \frac{5}{27}$$

$$y = \frac{5}{27}x - \frac{2}{3}$$

$$\text{iii) } \frac{x+2}{4x^2} + \frac{1}{4(2-x)} = \frac{(x+2)(2-x) + x^2}{4x^2(2-x)} = \frac{2x - x^2 + 4 - 2x + x^2}{4x^2(2-x)} = \frac{4}{x^2(2-x)} = f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{iv) area } E &= \int_{\frac{3}{2}}^5 \left(\frac{5}{27}x - \frac{2}{3} - f(x) \right) dx = \int_{\frac{3}{2}}^5 \left(\frac{5}{27}x - \frac{2}{3} - \frac{x+2}{4x^2} - \frac{1}{4(2-x)} \right) dx = \\ &= \int_{\frac{3}{2}}^5 \left(\frac{5}{27}x - \frac{2}{3} - \frac{1}{4x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{4(2-x)} \right) dx = \\ &= \left[\frac{5}{27} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x - \frac{1}{4} \log|x| + \frac{1}{2x} + \frac{\log|2-x|}{4} \right]_{\frac{3}{2}}^5 = \\ &= \left(\frac{5 \cdot 25}{27 \cdot 2} - \frac{10}{3} - \frac{1}{4} \log 5 + \frac{1}{10} + \frac{\log 3}{4} \right) - \left(\frac{45}{27 \cdot 2} - 2 - \frac{\log 3}{4} + \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{40}{27} - \frac{7}{2} + \frac{21}{10} - \frac{1}{4} \log 5 + \frac{1}{2} \log 3 \end{aligned}$$

$$\text{6) } P_{13}^{4,6,3} = \frac{13!}{4! 6! 3!}$$

FILA (B)

$$1) \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-1} \cdot 2^x}{2^{-|x|}} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^{-x^2+1} \cdot 2^x \cdot 2^{|x|} \leq 2^{-2}$$

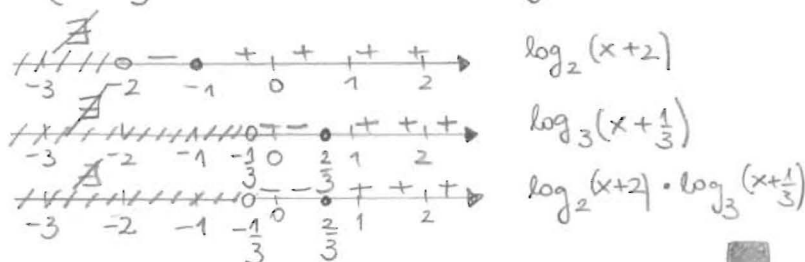
$$\Leftrightarrow 2^{-x^2+1+x+|x|} \leq 2^{-2}$$

$$\Leftrightarrow -x^2+1+x+|x| \leq -2 \quad (2^x \uparrow)$$

(vedi FILA (A) Es. 1)) $\Rightarrow \underline{S =]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [3, +\infty[}$ $\square$

$$\log_2(x+2) \cdot \log_3\left(x+\frac{1}{3}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+\frac{1}{3} > 0 \\ x+2 > 1 \\ x+\frac{1}{3} < 1 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+\frac{1}{3} > 0 \\ x+2 < 1 \\ x+\frac{1}{3} > 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \underline{S =]-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[}$$

$$2) i) \sum_{k=1}^6 \log_{\frac{1}{3}} 3^k = \sum_{k=1}^6 k \cdot \log_{\frac{1}{3}} 3 = \sum_{k=1}^6 (-k) = -1-2-3-4-5-6 = \underline{\underline{-21}}$$

$$\sum_{n=2}^5 2^{-n} \cdot 2^{1+n} = \sum_{n=2}^5 2^{-n+1+n} = \sum_{n=2}^5 2 = 4 \cdot 2 = \underline{\underline{8}}$$

$$ii) \sum_{n=1}^{22} \int_n^{n+(-1)^n \frac{1}{2}} e^{-x^2} dx,$$

$$iii) \int_{-4}^{-2} \left(\frac{x^4-1}{x} + e^{-3x} \right) dx = \int_{-4}^{-2} \left(x^3 - \frac{1}{x} - \frac{3e^{-3x}}{3} \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \log|x| - \frac{e^{-3x}}{3} \right]_{-4}^{-2} = \left[4 - \log 2 - \frac{e^6}{3} \right] - \left[64 - \log 4 - \frac{e^{12}}{3} \right]$$

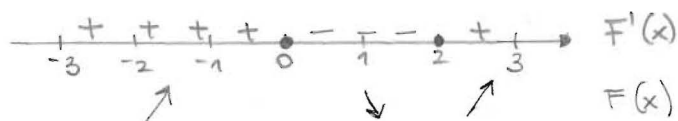
$$= \underline{\underline{-60 + \log 2 + \frac{e^{12} - e^6}{3}}}$$

$$iv) G(x) = \frac{x^{6/5}}{6/5} + c, \quad c \in \mathbb{R}, \text{ sono tutte le primitive di } f(x) = \sqrt[5]{x}.$$

Abbiamo $G(1) = 1$ se e solo se $\frac{5}{6} + c = 1$, ossia $c = \frac{1}{6}$. La primitiva ricercata è quindi $\underline{\underline{G(x) = \frac{5}{6} x^{6/5} + \frac{1}{6}}}$ $\square$

3) i) $F(x) = \int_{-3}^x f(t) dt$: $F(-3) = 0$, mentre $F(x) > 0 \quad \forall x \in]-3, 3]$. $\square$

ii) Dal teorema fond. del calcolo integrale sappiamo che $F'(x) = f(x)$, quindi il segno di $F'(x)$ è dato dal segno di $f(x)$:



Quindi in $[-3, 0]$ F è crescente, come lo è nell'intervallo $[2, 3]$; nell'intervallo $[0, 2]$ F è decrescente.

Abbiamo

$$\min_{[-3, 3]} F = F(-3) = 0$$

$x = -3$ pt. di minimo per F ;

$$\max_{[-3, 3]} F = F(0)$$

$x = 0$ pt. di massimo per F ;

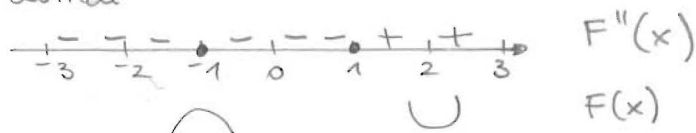
$F(2)$ è min. loc. per F , $x = 2$ pt. di min. loc.

$F(3)$ è max. loc. per F , $x = 3$ pt. di max. loc.

Oss. che abbiamo usato l'interpret. geom. di $F(x)$ per ottenere queste ultime considerazioni. $\square$

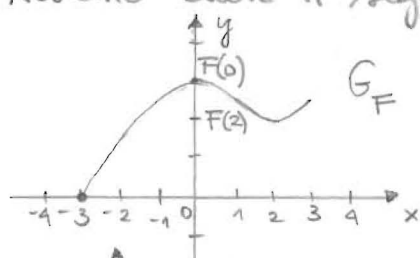
iii) Essendo f una funzione derivabile si ha $F''(x) = f'(x)$ in $]-3, 3[$.

Quindi

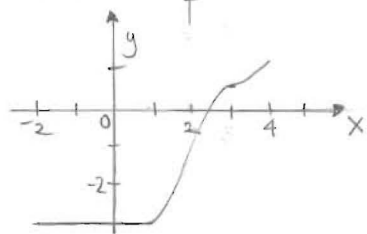


$x = 1$ pt. di flesso per F .

Abbiamo allora il seguente grafico qualitativo di F :



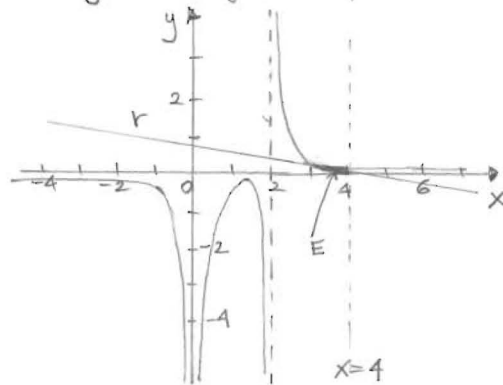
4)



Esempio di funzione $f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile che soddisfa i), ii), iii). $\blacksquare$

- 5) i) $f(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2}$. Osserviamo che questa funzione corrisponde alla funzione in Es. 5 FILA (A) cambiata di segno.

Abbiamo allora il seguente grafico qualitativo per f :



ii) $y = -\frac{5}{27}x + \frac{2}{3}$.

iii) $\frac{-x-2}{4x^2} + \frac{1}{4(x-2)} = \frac{-(x+2)(x-2) + x^2}{4x^2(x-2)} = \frac{-x^2 + 2x - 2x + 4 + x^2}{4x^2(x-2)} = \frac{4}{4x^2(x-2)} = \frac{1}{x^2(x-2)} = f(x)$.

iv) area $E = \int_3^4 \left(f(x) + \frac{5}{27}x - \frac{2}{3} \right) dx = \int_3^4 \left(\frac{-x-2}{4x^2} + \frac{1}{4(x-2)} + \frac{5}{27}x - \frac{2}{3} \right) dx =$
 $= \int_3^4 \left(-\frac{1}{4x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4(x-2)} + \frac{5}{27}x - \frac{2}{3} \right) dx =$
 $= \left[-\frac{1}{4} \log|x| + \frac{1}{2x} + \frac{\log|x-2|}{4} + \frac{5}{27} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x \right]_3^4 =$
 $= \left(-\frac{1}{4} \log 4 + \frac{1}{8} + \frac{\log 2}{4} + \frac{5}{27} \cdot 8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-\frac{1}{4} \log 3 + \frac{1}{6} + \frac{5}{27} \cdot \frac{9}{2} - 2 \right)$
 $= \frac{40}{27} + \frac{17}{8} - \frac{17}{6} - \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{4} \log 3$.

6) $P_{12}^{6,4,2} = \frac{12!}{6!4!2!}$.