

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2009/10 - Rovereto, 23-27 novembre 2009

$$1) i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{2^x}{x} - 1 \right)}{-x} = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + x}{x^2 + e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \left(1 + \frac{x}{3^x} \right)}{(e^2)^x \left(\frac{x^2}{e^{2x}} + 1 \right)} = \underline{\underline{0}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{+\infty}};$$

infinitesimo positivo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{-\infty}};$$

infinitesimo negativo

$$ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - |x|}{\log x - 2e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(1 - \frac{|x|}{e^x} \right)}{e^x \left(\frac{\log x}{e^x} - 2 \right)} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \log(1+4x)}{x} = \underline{\underline{0}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{2+x} = \underline{\underline{-\infty}};$$

infinitesimo negativo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x^5)}{x^5} = \underline{\underline{0}};$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1+|x|)}{e^x} = \underline{\underline{+\infty}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+4x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\log(1+4x)}{4x} \right) \cdot 4 = \underline{\underline{4}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{e^{\log(2x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{e^{4x} - 1}{4x} \right) \cdot 2 = \underline{\underline{2}}.$$

$$2) f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{3x^2 + x}{1-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(3 + \frac{1}{x} \right)}{x \left(\frac{1}{x} - 1 \right)} = \underline{\underline{+\infty}}$$

quindi f asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$.

Osserviamo però che f avrà un asintoto obliquo per $x \rightarrow -\infty$ poiché il numeratore si comporta come $3x^2$ e il denominatore come $-x$.
Eseguiamo allora i calcoli per determinare l'asintoto obliquo $y = ax + b$:

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + x}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(3 + \frac{1}{x})}{x^2(\frac{1}{x} - 1)} = -3 ;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x^2 + x}{1 - x} + 3x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x^2 + x + 3x - 3x^2}{1 - x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{4x}{1 - x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x(\frac{1}{x} - 1)} = -4 .$$

Ne segue che $y = -3x - 4$ è asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow -\infty$.

Otteniamo analogamente che $y = -3x - 4$ è asintoto obliquo per f anche per $x \rightarrow +\infty$.

Infine $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + x}{1 - x} = +\infty$, e quindi $x = 1$ è asint. verticale per f .
infiniteesimo positivo

e $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + x}{1 - x} = -\infty$.
infiniteesimo negativo

□

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow \underline{y = 0 \text{ è asint. orizzontale per } g, \text{ per } x \rightarrow -\infty.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{(x+2)^2} = +\infty \Rightarrow \underline{x = -2 \text{ è asintoto verticale per } g.}$$
infiniteesimo positivo

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} |\log(x+2)| = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |\log(x+2)| = +\infty$$

Non asintoto orizzontale, ma nemmeno obliquo per g , per $x \rightarrow +\infty$.

3) a) $f(x) = \frac{3}{x-1}$ $f'(x) = -\frac{3}{(x-1)^2}$ $f'(2) = -3$

eq. retta tg. al grafico di f in $(2, 3)$:

$$y = 3 - 3(x-2)$$

$$\underline{y = -3x + 9} ;$$

b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$ $g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $g'(1) = \frac{1}{3}$

eq. retta tg. al grafico di g in $(1,1)$: $y = 1 + \frac{1}{3}(x-1)$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$;

c) $h(x) = |x^2 - 2x|$: osserviamo che

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x^2 - 2x \geq 0 \\ -x^2 + 2x & \text{se } x^2 - 2x < 0 \end{cases}$$

ossia

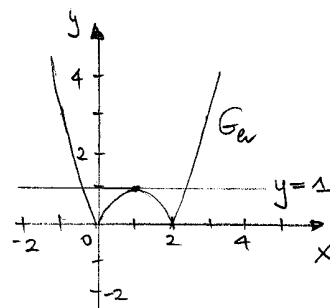
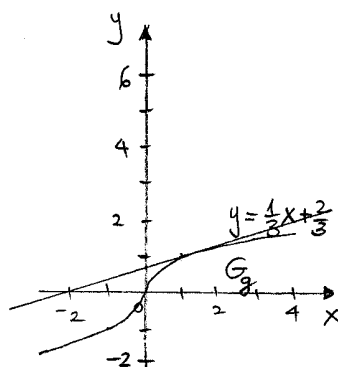
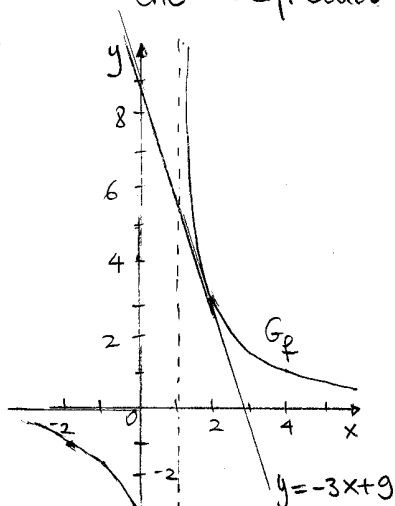
$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq 0 \text{ oppure } x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & \text{se } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Quindi dobbiamo considerare $h(x) = -x^2 + 2x$ poiché $1 \in]0,2[$.

Dunque $h'(x) = -2x + 2$ e quindi $h'(1) = 0$. Abbiamo allora

che l'eq. della retta tg. al grafico di h in $(1,1)$ è data da $y = 1 + 0 \cdot (x-1)$

ossia $y \equiv 1$.



ii) a) $f(x) = \sqrt{4x+1}$ in $(0,1)$: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+1}}$

Pendenza della retta tg. al grafico di f nel pt. $(0,1) = f'(0) = \underline{\underline{2}}$;

b) $g(x) = x^2 \log x$ in $(1,0)$: $g'(x) = 2x \log x + x$

Pendenza della retta tg. al grafico di g nel pt. $(1,0) = g'(1) = \underline{\underline{1}}$;

c) $h(x) = e^{-x^2+x}$ in $(1,1)$: $h'(x) = e^{-x^2+x} \cdot (-2x+1)$

Pendenza della retta tg. al grafico di h nel pt. $(1,1) = h'(1) = \underline{\underline{-1}}$.

4) i) a) $(4x^3 + x^{-5})' = \underline{12x^2 - 5x^{-6}}$;
 $(\frac{1}{x^3} - e^x)' = (x^{-3} - e^x)' = \underline{-3x^{-4} - e^x}$;

Una volta svoltte la derivata non vengono fatte delle semplificazioni di proporzio!

$(\frac{x^{-3}}{3-x})' = \frac{-3x^{-4}(3-x) + x^{-3}}{(3-x)^2}$;

$(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1})' = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt[3]{x}+1) - \sqrt{x} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt[3]{x}+1)^2}$;

b) $[(e^{-x}+x)(\log_4 x + x^{-1})]' = (e^{-x}+x)'(\log_4 x + x^{-1}) + (e^{-x}+x)(\log_4 x + x^{-1})'$
 $= (-e^{-x}+1)(\log_4 x + x^{-1}) + (e^{-x}+x)(\frac{1}{x \log 4} - x^{-2})$;

$[(x^{-\frac{1}{2}} + 2^x)(x + e^{2x})]' = (x^{-\frac{1}{2}} + 2^x)'(x + e^{2x}) + (x^{-\frac{1}{2}} + 2^x)(x + e^{2x})'$
 $= (-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 2^x \log 2)(x + e^{2x}) + (x^{-\frac{1}{2}} + 2^x)(1 + 2e^{2x})$.

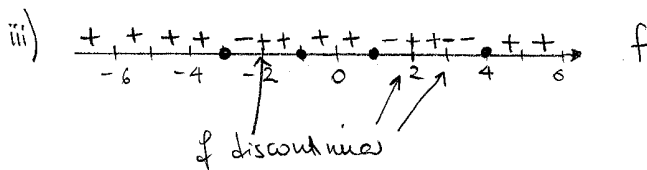
ii) $[(4x^2 + e^x)^{-3}]' = \underline{-3(4x^2 + e^x)^{-4} \cdot (8x + e^x)}$;

$(e^{2x^2-x^3})' = \underline{e^{2x^2-x^3} \cdot (4x - 3x^2)}$;

$[x^{-2} \log(1+3x)]' = \underline{-2x^{-3} \cdot \log(1+3x) + x^{-2} \frac{3}{1+3x}}$.

5) i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{1}$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \underline{-1}$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \underline{+\infty}$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \underline{-\infty}$;
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \underline{1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{+\infty}$.

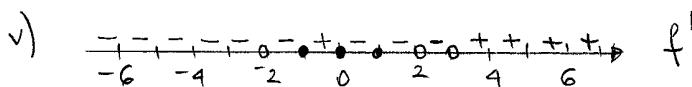
ii) Punti di discontinuità : $\underline{x = -2 ; x = 2 ; x = 3}$.



iv) $y = 1$ asint. orizz. per f , per $x \rightarrow -\infty$;

$x = -2, x = 2$ asintoti verticale per f ;

$y = x - 2$ asint. obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$.



vi) $m = 0$ min. loc. di f su $[-1, 3]$ e $x = -1$ pt. di min. loc.

$m = -2$ " " e $x = 3$ "

Note: $\nexists$ minimo di f su $[-1, 3]$.

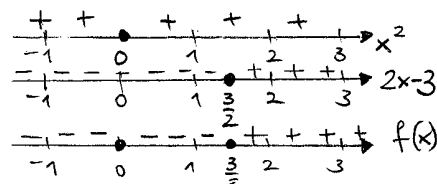
$M=1$ massimo loc. di f in $[-1, 3]$ e $x=0, x=2$ pt. di max. loc.

NOTA: M è massimo di f in $[-1, 3]$.

6) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• $2x^3 - 3x^2 = x^2(2x-3)$



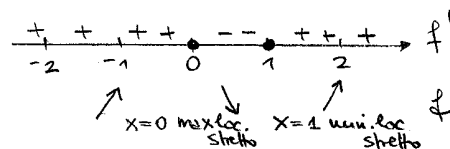
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• f è continua essendo somma di funzioni continue.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

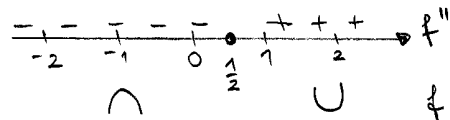
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0, x=1$ pt. critici di f .

$f(0) = 0$ $f(1) = -1$



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = 12x - 6 = 6(2x-1)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$



$x = \frac{1}{2}$ pt. di flesso.

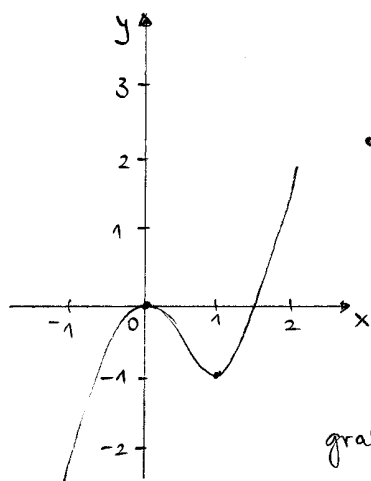
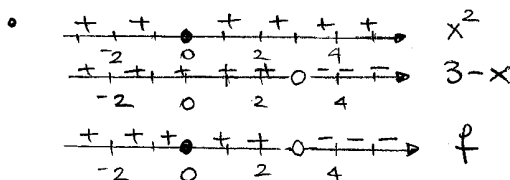


grafico qualitativo della f .



$f(x) = \frac{x^2}{3-x}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x-x^2} = -1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{3-x} + x \right] =$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{3x}{3-x} \right] = -3$

$y = -x - 3$ è asint. obliquo per f , per $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty ; \quad \text{ripetendo gli stessi conti fatti per } x \rightarrow -\infty$$

mostrare che $y = -x-3$ è asint. obliquo per

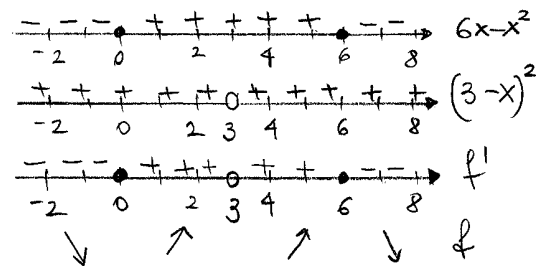
f , per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua su $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, essendo rapporto di funzioni continue.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad f'(x) = \frac{2x(3-x) + x^2}{(3-x)^2} = \frac{6x - x^2}{(3-x)^2}$

$x=0, x=6$ sono pt. critici

$$f(0) = 0 \quad f(6) = \frac{36}{-3} = -12$$



$x=0$ pt. di min. loc. $x=6$ pt. di max. loc.
stello per f . stello per f .

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{3\} \quad f''(x) = \frac{(6-2x)(3-x)^2 + (6x-x^2) \cdot 2(3-x)}{(3-x)^3}$

$$= \frac{18}{(3-x)^3}$$

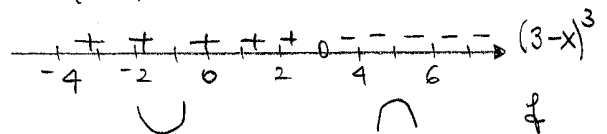
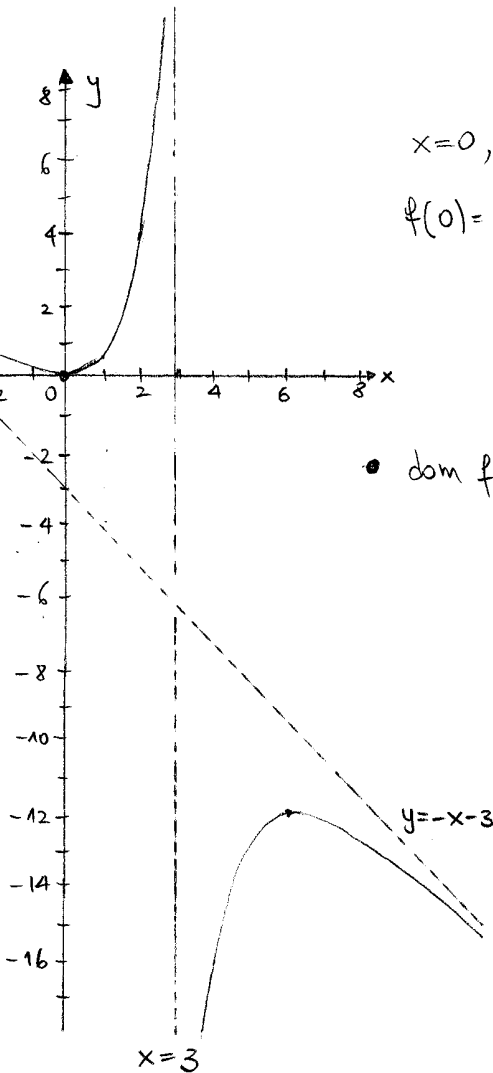


grafico qualitativo della f .

□



$$f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+1}$$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ Oss. f è pari!!

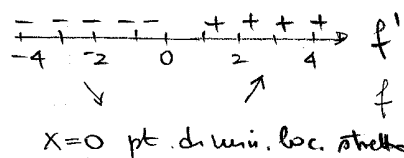
• $\frac{+}{-2} \frac{+}{-\sqrt{2}} \frac{-}{-1} \frac{-}{0} \frac{-}{1} \frac{+}{\sqrt{2}} \frac{+}{2} \frac{+}{3} f \quad (x^2+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R})$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $y=1$ è asint. orizzontale per f per $x \rightarrow -\infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

- f è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo rapporto di funzioni continue e il denominatore non si annulla mai.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - (x^2-2) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2}$

$x=0$ è pt. critico e
 $f(0) = -2$



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = \frac{6(x^2+1)^2 - 6x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} =$

$$= \frac{6x^2 + 6 - 24x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{6 - 18x^2}{(x^2+1)^3}$$

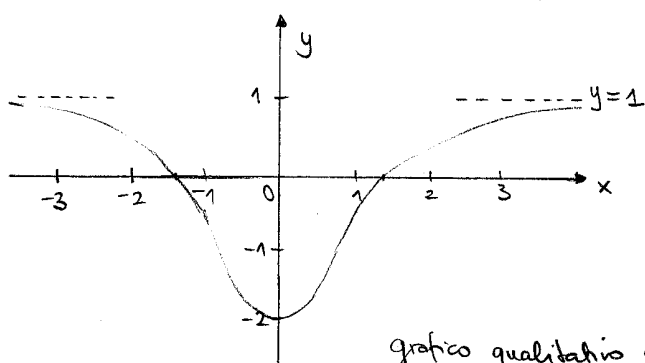
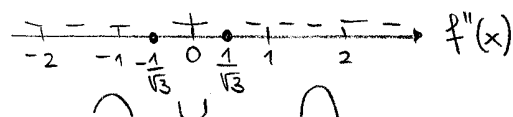


grafico qualitativo della f

□

$f(x) = (1-2x)e^{-x^2}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• $\left(e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \right)$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-2x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-2x}{e^{x^2}} = 0$

$y=0$ è asintoto orizzontale
 per f per $x \rightarrow -\infty$ (per $x \rightarrow +\infty$).

- f è continua su $\mathbb{R}$ poiché composizione e prodotto di funzioni continue.

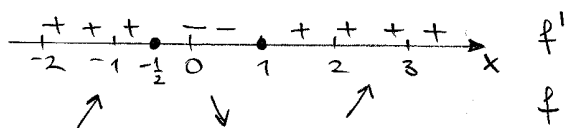
• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = -2e^{-x^2} + (1-2x)e^{-x^2}(-2x)$
 $= e^{-x^2}[-2-2x+4x^2]$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 2x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{8} = \frac{2 \pm 6}{8} \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix}$

$x = -\frac{1}{2}$, $x = 1$ pt. critici per f

$f(-\frac{1}{2}) = 2e^{-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e}} \approx 1.5$ $f(1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0.4$



$x = -\frac{1}{2}$ pt. di max. loc. stretto per f

$x = 1$ pt. di min. loc. stretto per f .

• lo studio del segno della derivata seconda f'' di f viene omesso!

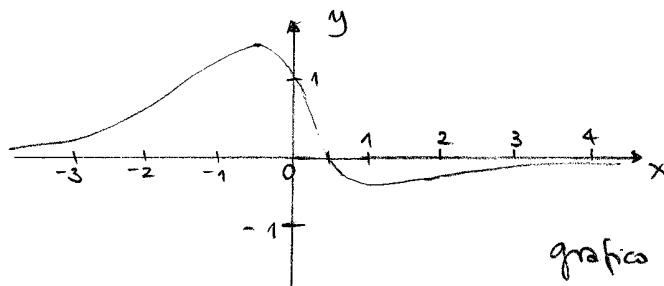


grafico qualitativo della f .

