

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive  
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva  
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia  
 Esame scritto di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)  
 a.a. 2009-2010 - Rovereto, 12 luglio 2010

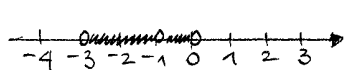
FILA (A)

i) a)  $A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 + 3x)|x+1| < 0\} = ]-3, 0[ \setminus \{-1\}$   
 b)  $B = \{x \in \mathbb{R} : \log(3x) - \log(4-x^2) \geq 0\} = [1, 2[$

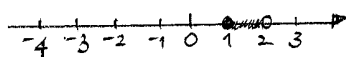
$$\log(3x) - \log(4-x^2) \geq 0 \Leftrightarrow \log(3x) \geq \log(4-x^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 4-x^2 > 0 \\ 3x \geq 4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 < x < 2 \\ x^2 + 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2 \\ (x \leq -4) \vee (x \geq 1) \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$$



/// = A



/// = B.

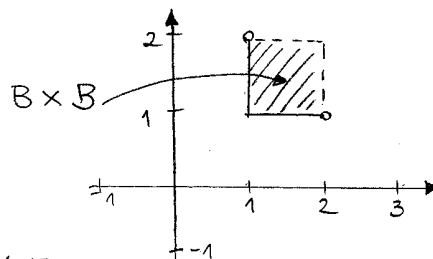


ii)  $A \cup B = ]-3, 0[ \setminus \{-1\} \cup [1, 2[$

$A \cap B = \emptyset$



iii)



b)  $\begin{matrix} A & V & V & F & F \\ B & V & F & V & F \end{matrix}$

$A \Rightarrow B \quad V \quad F \quad V \quad V$

$\text{non } B \quad F \quad V \quad F \quad V$

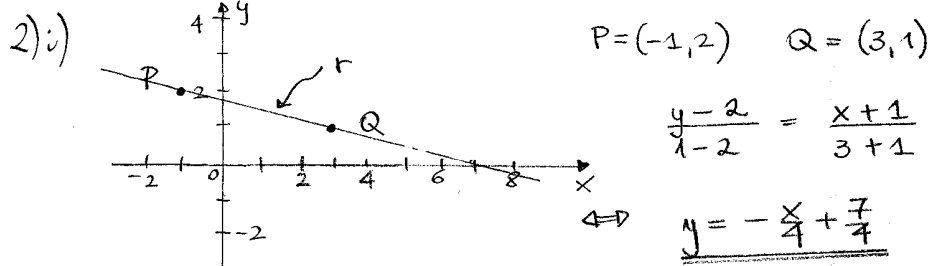
$(A \Rightarrow B) \vee (\text{non } B) \quad F \quad F \quad F \quad V$

$\text{non } A \quad F \quad F \quad V \quad V$

$((A \Rightarrow B) \vee (\text{non } B)) \Rightarrow (\text{non } A) \quad V \quad V \quad V \quad V$

La proposizione data è sempre vera, indipendente dai valori di verità di A e B.





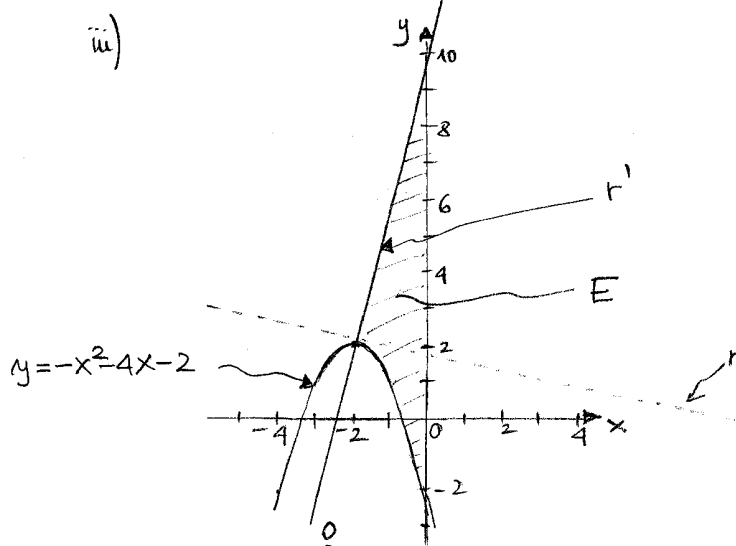
ii)  $y = -x^2 - 4x - 2$

$$y = -(x^2 + 4x) - 2$$

$$= -(x+2)^2 + 2$$

$V = (-2, 2)$

La retta  $r' \perp r$  ha pendenza  $m' = 4$ ; la retta  $r'$  passa per  $V$  se e solo se  $V$  soddisfa l'eq.  $y = 4x + q$ , ossia  $2 = -8 + q$ , da cui  $q = 10$ . L'eq. della retta  $r'$  è quindi  $y = 4x + 10$ .  $\square$

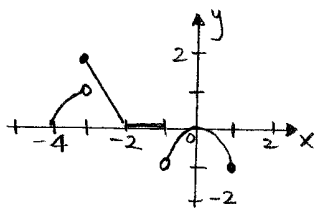


iv)  $\text{area}(E) = \int_{-2}^0 [(4x+10) - (-x^2-4x-2)] dx = \int_{-2}^0 (x^2 + 8x + 12) dx =$

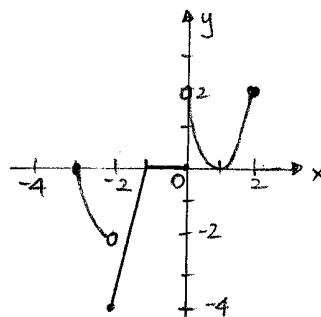
$$= \left[ \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 12x \right]_{-2}^0 = -\left( -\frac{8}{3} + 16 - 24 \right) = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

$\blacksquare$

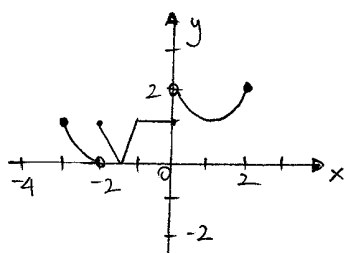
3) i)  $x \mapsto f(x+1)$  su  $[-4, 1]$



$x \mapsto -2f(x)$  su  $[-3, 2]$



$$x \mapsto |f(x)-1| \quad \text{in } [-3,2].$$



ii)  $f$  non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass, poiché  $f$  non è continua in  $x = -2$  e in  $x = 0$ :

$$\text{in } x = -2 \text{ si ha } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2 = f(-2)$$

$$\text{in } x = 0 \text{ si ha } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1.$$

iii)  $\max_{[-3,2]} f = 2$   $x = -2$  pt. di massimo;

$\min_{[-3,2]} f = -1$   $x = 2$  pt. di minimo.

iv) Se  $k < -1$   $\nexists$  soluzioni dell'eq.  $f(x) = k$ ;

se  $k = -1$   $\exists$  una soluzione " ;

se  $-1 < k < 0$   $\exists$  2 soluzioni " ;

se  $k = 0$   $\exists$  infinite soluzioni " ;

se  $0 < k < 1$   $\exists$  2 soluzioni " ;

se  $1 \leq k \leq 2$   $\exists$  una soluzione " ;

se  $k > 2$   $\nexists$  soluzioni dell'eq.  $f(x) = k$ .

v)  $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-2) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$   
 $\forall x \in \mathbb{R}$ , poiché  $g(\mathbb{R}) = \{-2\} \subset \text{dom } f$ .

$g \circ f: [-3,2] \rightarrow \mathbb{R}$   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = -2 \quad \forall x \in [-3,2]$   
 $\forall x \in [-3,2]$ , poiché  $f([-3,2]) \subset \mathbb{R} = \text{dom } g$ . ■

4) i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x}{e^x + 1} = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + \frac{x}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \frac{1}{1} = 1$

ii)  $f$  è strett. crescente in  $\mathbb{R}$ , poiché  $f'(x) = e^x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . □

iii) Oss. che  $f$  è una funzione continua in  $\mathbb{R}$ , inoltre  $f(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$  e  $f(0) = 1 > 0$ . Dal teorema di esistenza degli zeri esiste (unico! essendo  $f$  strett. crescente)  $x_0 \in ]-1, 0[$  t.c.  $f(x_0) = 0$  !! Quindi  $\frac{1}{f(x)}$  non è ben definita in  $[-1, 0]$ .  $\blacksquare$

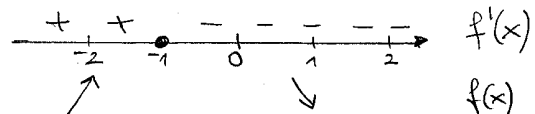
5)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$  i) •  $\text{dom } f = \mathbb{R}$  poiché  $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

•  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$   $y=0$  è asint. orizzontale per  $f$  (per  $x \rightarrow -\infty$  e per  $x \rightarrow +\infty$ ).

•  $f$  è continua, poiché numeratore e rapporto di funzioni continue e il denominatore non si annulla mai.

•  $\text{dom } f' = \mathbb{R}$  e  $f'(x) = \frac{-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$ . Si ha  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$



$x = -1$  è un pt. di massimo locale per  $f$  e  $f(-1) = 1$ .

•  $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$  e  $f''(x) = \frac{-2(x^2+2x+2)^2 + (2x+2)^2 \cdot 2(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)^3}$   

$$= \frac{-2x^2 - 4x - 4 + 8x^2 + 16x + 8}{(x^2+2x+2)^3} = \frac{6x^2 + 12x + 4}{(x^2+2x+2)^3}$$

Poiché  $6x^2 + 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = -1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

si ha

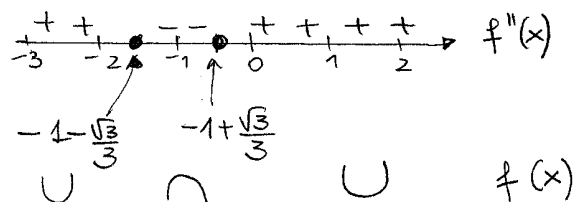
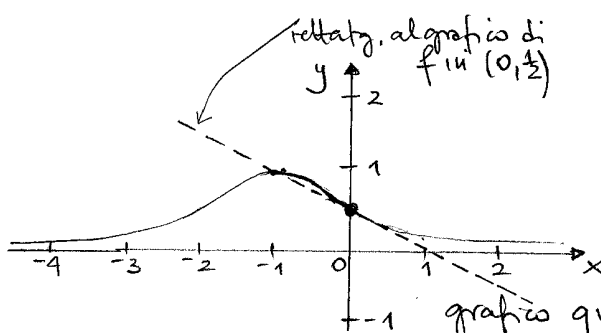
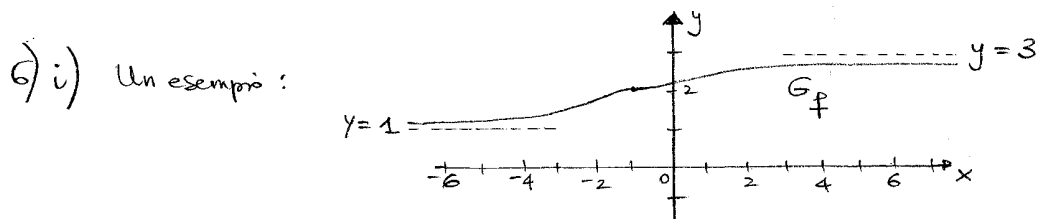


grafico qualitativo di  $f$ .  $\square$

ii)  $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-0)$  ossia  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  è l'eq. della retta tg. al grafico di  $f$  in  $(x_0, f(x_0)) = (0, \frac{1}{2})$ .  $\square$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \int_{-1}^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx &= \left[ \log |f(x)| \right]_{-1}^2 = \\ &= \left[ \log \left( \frac{1}{x^2+2x+2} \right) \right]_{-1}^2 = \left[ -\log(x^2+2x+2) \right]_{-1}^2 \\ &= -\log 10 + \cancel{\log 1} = \underline{\underline{-\log 10.}} \end{aligned}$$



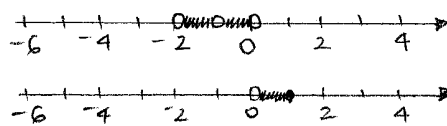
$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \sum_{n=2}^5 \frac{n-1}{n^2-1} &= \sum_{n=2}^5 \frac{\cancel{n-1}}{(\cancel{n-1})(n+1)} = \sum_{n=2}^5 \frac{1}{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{9}{20} = \underline{\underline{\frac{19}{20}.}} \end{aligned}$$

### FILA (B)

$$1) a) i) \quad A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2+2x)|x+1| < 0\} = \underline{\underline{]-2, 0[ \setminus \{-1\}}}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \log(3x) - \log(4-x^2) \leq 0\} = \underline{\underline{[0, 1]}}.$$

(vedi FILA (A))  
Es. 1 a) i)

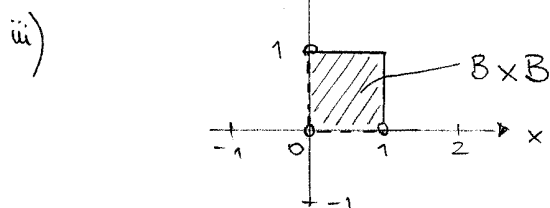


$$\text{iii)} = A$$

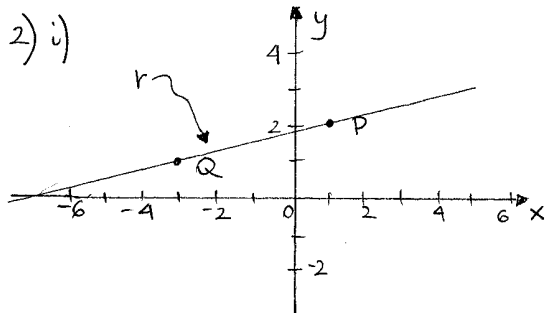
$$\text{iii)} = B.$$

$$\text{ii)} \quad A \cup B = ]-2, 1] \setminus \{-1, 0\}.$$

$$A \cap B = \emptyset$$



$$b) \text{ vedi FILA (A), Es. 1 b).}$$



$$P = (1, 2) \quad Q = (-3, 1)$$

$$\frac{y-2}{1-2} = \frac{x-1}{-3-1}$$

$$\Leftrightarrow \underline{y = \frac{x}{4} + \frac{7}{4}} \quad \text{eq. della retta } r.$$

□

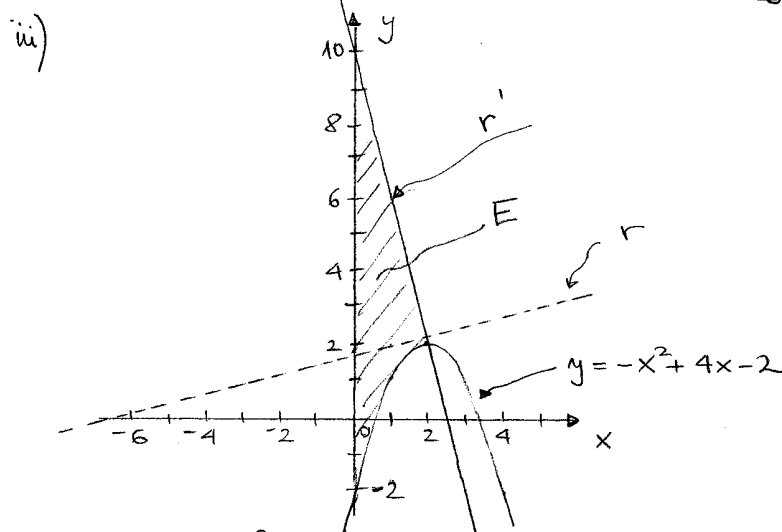
ii)  $y = -x^2 + 4x - 2$

$$y = -(x^2 - 4x) - 2$$

$$= -(x-2)^2 + 2 \quad V = (2, 2)$$

La retta  $r' \perp r$  ha pendenza  $m' = -4$ ; la retta  $r'$  passa per  $V$  se e solo se  $V$  soddisfa l'eq.  $y = -4x + q$ , ossia  $2 = -8 + q$ , da cui  $q = 10$ . L'eq. della retta  $r'$  è quindi  $y = -4x + 10$ .

□

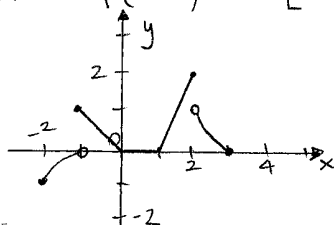


□

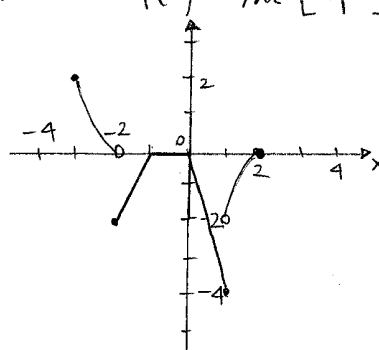
iv)  $\text{area}(E) = \int_0^2 [(-4x + 10) - (-x^2 + 4x - 2)] dx = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$

■

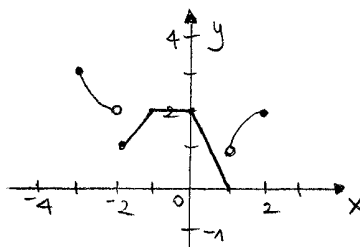
3) i)  $x \mapsto f(x-1)$  in  $[-2, 3]$



$x \mapsto -2f(x)$  in  $[-3, 2]$



$x \mapsto |f(x-2)|$  in  $[-3, 2]$



□

ii)  $f$  non soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass, poiché  $f$  non è continua in  $x = -2$  e  $x = 1$ :

in  $x = -2$  si ha  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1 = f(-2)$

in  $x = 1$  si ha  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$ .  $\square$

iii)  $\max_{[-3,2]} f = 2$   $x = 1$  pt. di massimo;

$\min_{[-3,2]} f = -1$   $x = -3$  pt. di minimo.  $\square$

iv) Se  $k < -1$  Sono soluzioni dell'eq.  $f(x) = k$ ;

se  $-1 \leq k < 0$   $\exists$  una soluzione " ;

se  $k = 0$  Sono infinite soluzioni " ;

se  $0 < k < 1$  Sono 3 soluzioni " ;

se  $k = 1$  Sono 2 soluzioni " ;

se  $1 < k \leq 2$   $\exists$  una soluzione " ;

se  $k > 2$  Sono soluzioni dell'eq.  $f(x) = k$ .  $\square$

v)  $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1) = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$   
 $\uparrow$   
 $\forall x \in \mathbb{R}$ , poiché  $g(\mathbb{R}) = \{1\} \subset \text{dom } f$ .

$g \circ f: [-3,2] \rightarrow \mathbb{R}$   $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 1 \quad \forall x \in [-3,2]$   
 $\uparrow$   
 $\forall x \in [-3,2]$ , poiché  $f([-3,2]) \subset \mathbb{R} = \text{dom } g$ .  $\blacksquare$

4) i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x^3}{e^x + 3x^2} = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^3}{e^x + 3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1 + \frac{x^3}{e^x})}{e^x(1 + \frac{3x^2}{e^x})} = 1$

ii)  $f$  è strettamente crescente su  $\mathbb{R}$ , poiché  $f'(x) = e^x + 3x^2 > 0$   $\forall x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

iii) Oss. che  $f$  è una funzione continua su  $\mathbb{R}$ . Inoltre  $f(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$  e  $f(0) = 1 > 0$ . Dal teorema di esistenza degli zeri esiste (unico! essendo  $f$  strett. crescente)  $x_0 \in ]-1, 0[$  t.c.  $f(x_0) = 0$  ! Quindi  $\frac{1}{f(x)}$  non è ben definita su  $[-1, 0]$ .  $\blacksquare$

5)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$

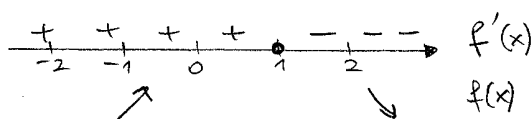
i) •  $\text{dom } f = \mathbb{R}$  poiché  $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

•  $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ .

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$   $y=0$  è asint. orizzontale per  $f$  (per  $x \rightarrow -\infty$  e per  $x \rightarrow +\infty$ ).

•  $f$  è continua, poiché somma e rapporto di funzioni continue e il denominatore non si annulla mai.

•  $\text{dom } f' = \mathbb{R}$  e  $f'(x) = \frac{-(2x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$ . Si ha  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$



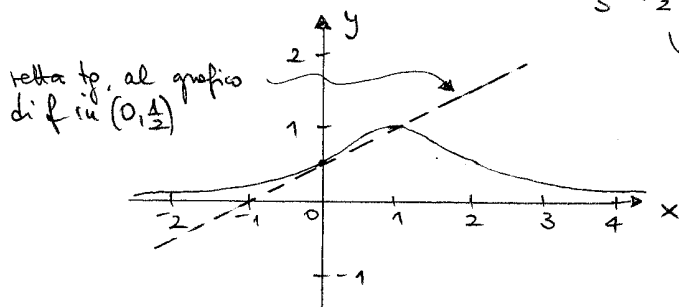
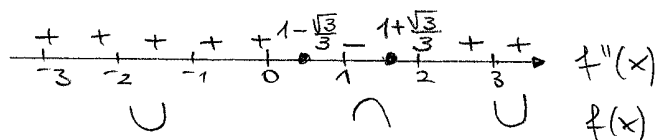
$x = 1$  è un punto di massimo locale per  $f$  e  $f(1) = 1$ .

•  $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$  e  $f''(x) = \frac{-2(x^2-2x+2)^2 + (2x-2)^2 \cdot 2(x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)^4}$   
 $= \frac{-2x^2 + 4x - 4 + 8x^2 - 16x + 8}{(x^2-2x+2)^3} = \frac{6x^2 - 12x + 4}{(x^2-2x+2)^3}$

Poiché  $6x^2 - 12x + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6}$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

si ha



retta tg. al grafico di  $f$  in  $(0, \frac{1}{2})$

grafico qualitativo di  $f$ .



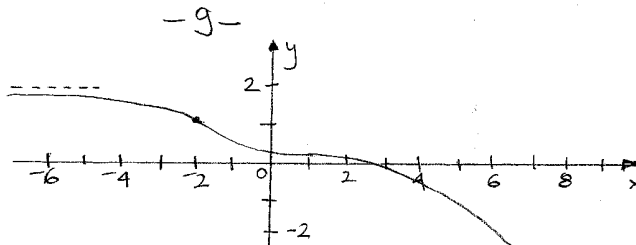
ii)  $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-0)$  ossia  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  è l'eq. della retta tg al grafico di  $f$  in  $(x_1, f(x_1)) = (0, \frac{1}{2})$



iii)  $\int_{-2}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left[ \log |f(x)| \right]_{-2}^1 = \left[ \log \left( \frac{1}{x^2 - 2x + 2} \right) \right]_{-2}^1 = \log(1) - \log\left(\frac{1}{10}\right)$   
 $= \underline{\underline{\log 10}}$



6) ii) un esempio :



$$\begin{aligned}
 \text{ii) } \sum_{n=3}^5 \frac{n-2}{4-n^2} &= - \sum_{n=3}^5 \frac{n-2}{n^2-4} = - \sum_{n=3}^5 \frac{\cancel{n-2}}{(\cancel{n-2})(n+2)} = - \sum_{n=3}^5 \frac{1}{n+2} = \\
 &= - \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) = - \left( \frac{11}{30} + \frac{1}{7} \right) \\
 &= - \frac{107}{210}
 \end{aligned}$$

□