

Università di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 CdL in Filosofia

Esame scritto di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2009-2010 - Rovereto, 30 agosto 2010

FILA (A)

1) i) $A = "\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x-2=y"$

$\text{non } A = "\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N}, x-2 \neq y" =$
 $= "\exists x \in \mathbb{N} : \forall y \in \mathbb{N}, x-2 < y \text{ o } x-2 > y"$.

Osserviamo che A è falsa essendo $\text{non } A$ vera: basta prendere $x=0$ e si ha che $\forall y \in \mathbb{N}, 0 < y+2$. $\square$

ii) $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x + |x-1| > 0\}$:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x+x-1 > 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x-1 < 0 \\ 3x-(x-1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4x > 1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 1 \\ 2x > -1 \end{cases}$$

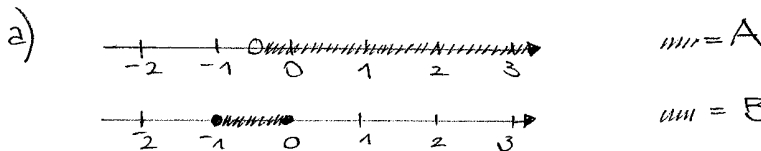
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -\frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{A =]-\frac{1}{2}, +\infty[}.$$

$B = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2+x} - 1 \leq 0\}$:

$$2^{x^2+x} \leq 1 \Leftrightarrow 2^{x^2+x} \leq 2^0 \Leftrightarrow x^2+x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x \in [-1, 0]$$

$$\Rightarrow \underline{B = [-1, 0]}. \quad \square$$

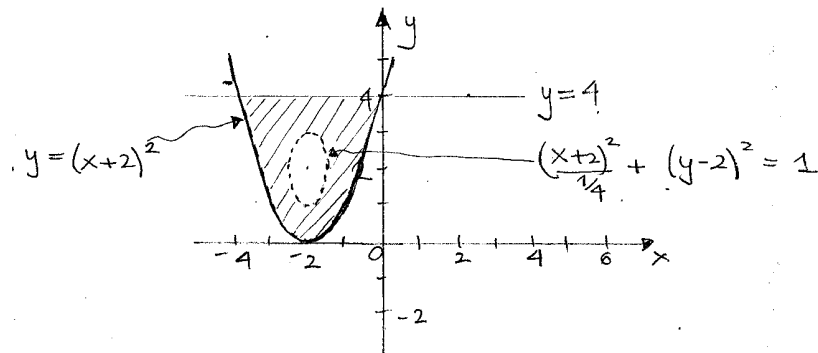


b) $A \cup B = \underline{[-1, +\infty[}$ $A \cap B = \underline{]-\frac{1}{2}, 0]}$ $A \setminus B = \underline{]0, +\infty[}$. $\square$

c) $\min B = \underline{-1}$ $\max B = \underline{0}$. $\blacksquare$

2) $4(x+2)^2 + (y-2)^2 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x+2}{\frac{1}{4}}\right)^2 + (y-2)^2 > 1$

$$y - x^2 - 4x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow y \geq (x+2)^2$$



Soluzioni del sistema =

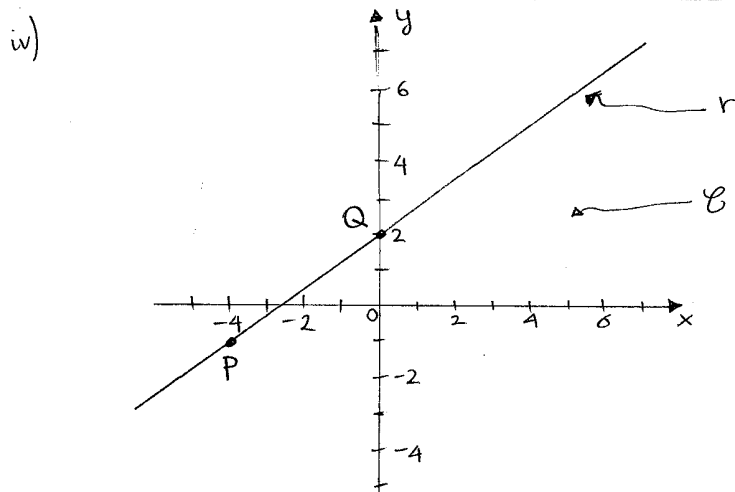
i) La retta $x=2$ non interseca l'insieme dei pt. (x,y) del sistema sopra, poiché questi punti soddisfano tutti $x \leq 0$.

ii) Sì; infatti il punto $(-2,0)$ appartiene alla retta $y=0$, ed appartiene all'insieme soluzione.

3) i) $P=(-4,-1)$ $m=\frac{3}{4} \Rightarrow r$ ha l'eq. $y=-1+\frac{3}{4}(x+4)$
ossia $y=\frac{3}{4}x+2$. ☐

ii) $Q=(0,2)$; $d(P,Q) = \sqrt{(-4-0)^2 + (-1-2)^2}$
 $= \sqrt{16+9} = \underline{5}$. ☐

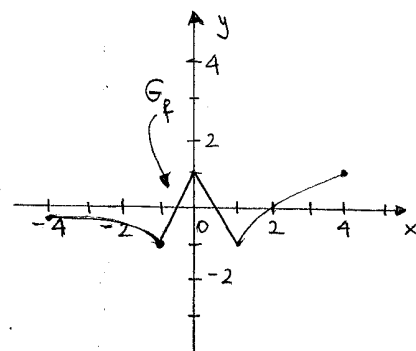
iii) $\mathcal{C}$ ha eq. $(x-0)^2 + (y-2)^2 = 25$, ossia
 $x^2 + (y-2)^2 = 25$. ☐



v) $y=k$ con $-3 \leq k \leq 7$ sono le rette orizzontali che intersecano $\mathcal{C}$ in almeno un punto.

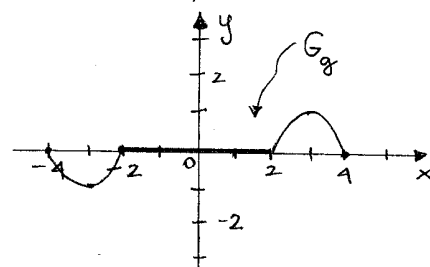
4) i) $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } -4 \leq x \leq -1 \\ -2|x|+1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \log_2 x - 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 4, \end{cases}$$



$g: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 1 & \text{se } -4 \leq x \leq -2 \\ 0 & \text{se } -2 < x < 2 \\ -(x-3)^2 + 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$



ii) $\min_{[-4, 4]} f = \underline{\underline{-1}}$

$x = -1, x = 1$ sono pt. di minimo,

$\max_{[-4, 4]} f = \underline{\underline{1}}$

$x = 0, x = 4$ sono pt. di massimo.

iii)
$$\begin{aligned} \int_{-4}^1 f(x) dx &= \int_{-4}^{-1} \frac{1}{x} dx + \int_{-1}^1 (-2|x|+1) dx = \\ &= [\log|x|]_{-4}^{-1} + \int_{-1}^0 (2x+1) dx + \int_0^1 (-2x+1) dx = \\ &= -\log 4 + [x^2 + x]_{-1}^0 + [-x^2 + x]_0^1 = \\ &= -\log 4 - (1-1) + (-1+1) = \underline{\underline{-\log 4.}} \end{aligned}$$

Oss. Sfruttando l'interpretazione geometrica dell'integrale si poteva

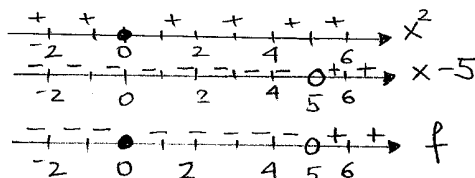
concludere immediatamente che $\int_{-1}^1 (-2|x|+1) dx = 0$!!

iv) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4, 4], 0 \leq y \leq g(x)\}$; allora

$$\begin{aligned} \text{area } A &= \int_{-2}^4 (-(x-3)^2 + 1) dx = \left[-\frac{(x-3)^3}{3} + x \right]_{-2}^4 = \left(-\frac{1}{3} + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + 2 \right) \\ &= 2 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}. \end{aligned}$$

5) $f(x) = \frac{x^2}{x-5}$ • dom $f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

• segno di f



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$\Downarrow$
 $x=5$ è asintoto verticale per f

Oss. che esiste anche un asintoto obliquo per f :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 5x} = 1;$$

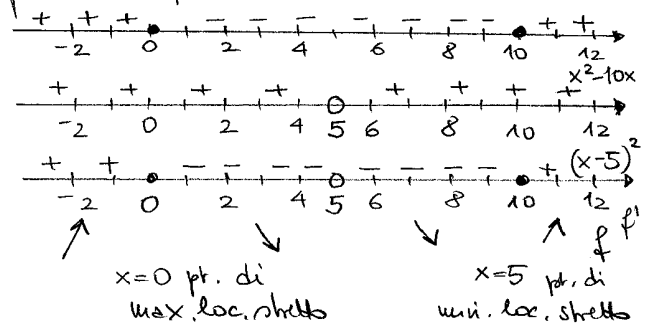
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{5x}{x-5} \right] = 5.$$

$\Rightarrow y = x + 5$
è asintoto obliquo per
 f per $x \rightarrow -\infty$
(per $x \rightarrow +\infty$).

f è continua e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{5\}$. Inoltre

$$f'(x) = \frac{2x(x-5) - x^2}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x}{(x-5)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 10 \text{ pt. critici per } f$$



$$f(0) = 0$$

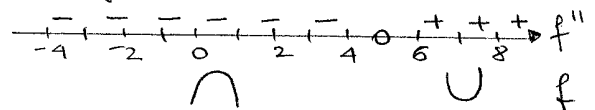
$$f(10) = \frac{100}{5} = 20.$$

$x=0$ pt. di
max. loc. stretto

$x=5$ pt. di
min. loc. stretto

$\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

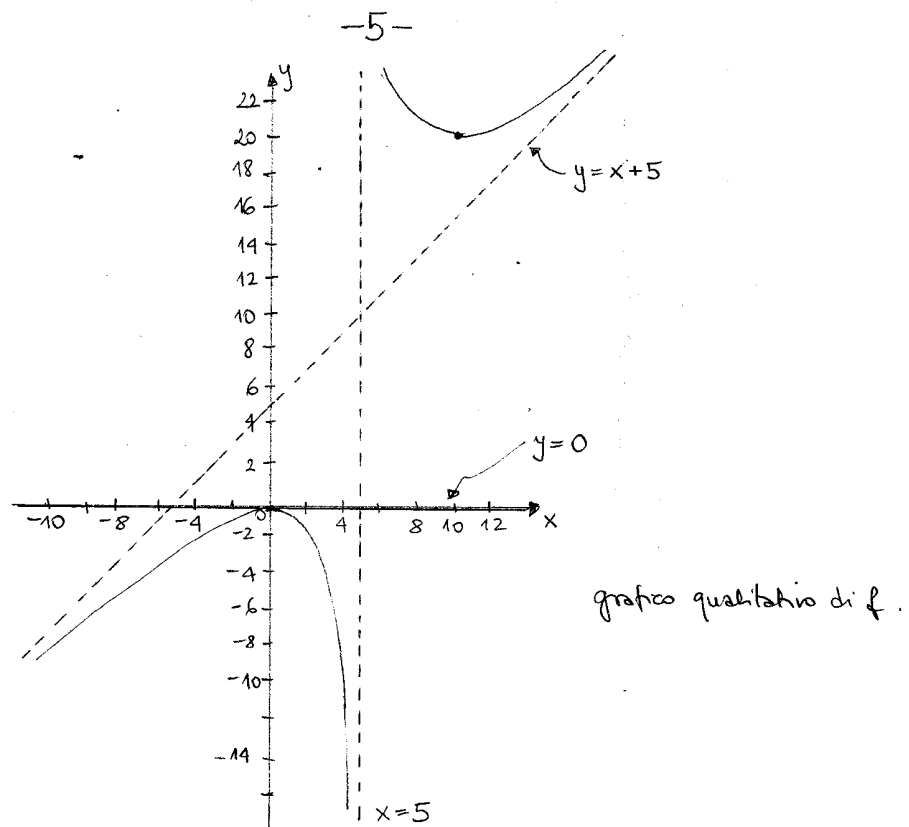
$$f''(x) = \frac{(2x-10)(x-5)^2 - (x^2-10x)2(x-5)}{(x-5)^4} = \frac{50}{(x-5)^3}$$



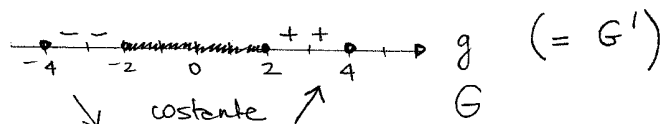
ii) Eq. della retta tg al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

$$\text{Si ha } y = 0 + 0(x - 0);$$

$\Rightarrow y = 0$ eq. della retta tg. al grafico di f in $(0, 0)$.

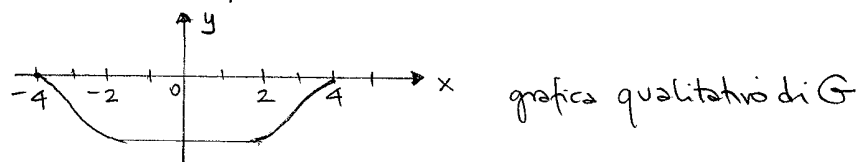


- 6) i) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha
 $G'(x) = g(x)$ su $[-4, 4]$; dal segno di g segue il segno di G' e quindi la monotonia di G



- ii) G è strettamente decrescente su $[-4, -2]$, è costante su $[-2, 2]$, è strettamente crescente su $[2, 4]$. □

NOTA: Poiché $G''(x) = g'(x)$, dal segno di g' si ottiene quello di G'' e quindi la convessità/concavità di G



FILA (B)

1) i) vedi Es. 1 i) FILA (A). □

ii) $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x + |x-2| > 0\}$:

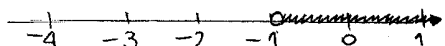
$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 3x+x-2 > 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x-2 < 0 \\ 3x-(x-2) > 0 \end{cases}$$

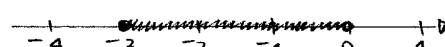
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 4x > 2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 2 \\ 2x > -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{A =]-1, +\infty[.}}$$

$B = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2+3x} - 1 \leq 0\}$:

$$2^{x^2+3x} \leq 1 \Leftrightarrow 2^{x^2+3x} \leq 2^0 \Leftrightarrow \begin{matrix} 2^x \uparrow \\ x^2+3x \leq 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{\underline{B = [-3, 0]}}$$

a)  $\text{num} = A$

 $\text{num} = B$ □

b) $A \cup B = \underline{\underline{[-3, +\infty[}}$ $A \cap B = \underline{\underline{]-1, 0]}}$ $A \setminus B = \underline{\underline{]0, +\infty[}}$ □

c) $\min B = \underline{\underline{-3}}$ $\max B = \underline{\underline{0}}$ ■ □

2) i) $P = (4, -1)$ $m = -\frac{3}{4} \Rightarrow r \text{ ha l'eq. } y = -1 - \frac{3}{4}(x-4)$

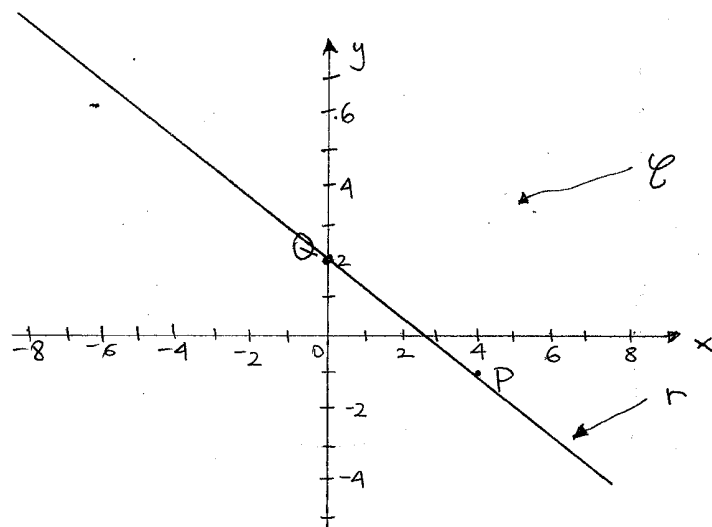
ossia $\underline{\underline{y = -\frac{3}{4}x + 2.}}$ □

ii) $Q = (0, 2)$; $d(P, Q) = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{16+9} = \underline{\underline{5.}}$ □

iii) $\mathcal{C}$ ha eq. $(x-0)^2 + (y-2)^2 = 25$, ossia

$\underline{\underline{x^2 + (y-2)^2 = 25.}}$ □

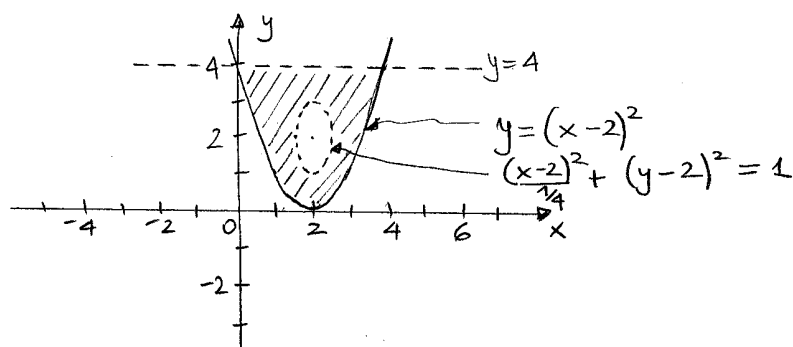
u)



v) $x = k$ con $-5 \leq k \leq 5$ sono le rette verticali che intersecano $\mathcal{E}$ in almeno un punto. 

$$3) \quad 4(x-2)^2 + (y-2)^2 > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{\frac{1}{4}} + (y-2)^2 > 1$$

$$y - x^2 + 4x - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq x^2 - 4x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq (x-2)^2$$



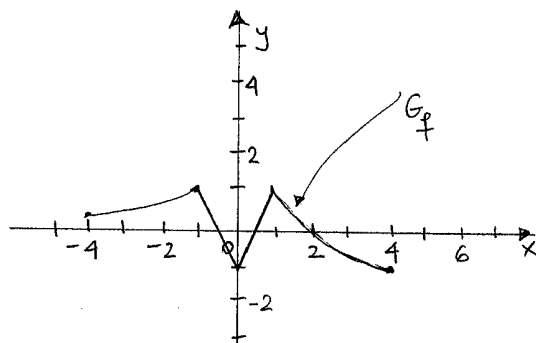
Soluzione del sistema = 

i) La retta $x = -2$ non interseca l'insieme dei pt. (x, y) del sistema
Sopra, poiché questi punti soddisfano tutti $x \geq 0$.

ii) Sì; infatti il punto $(2, 0)$ appartiene alla retta $y = 0$ ed appartiene all'insieme soluzione. 

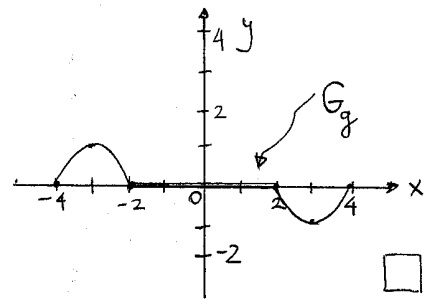
4) i) $f: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } -4 \leq x \leq -1 \\ 2|x| - 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ -\log_2 x + 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



$$g: [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 1 & \text{se } -4 \leq x \leq -2 \\ 0 & \text{se } -2 < x < 2 \\ (x-3)^2 - 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



ii) $\min_{[-4, 4]} f = -1$ $x=0, x=4$ sono pt. di minimo,

$\max_{[-4, 4]} f = 1$ $x=-1, x=1$ sono pt. di massimo.

iii)
$$\int_{-4}^1 f(x) dx = \int_{-4}^{-1} \left(-\frac{1}{x}\right) dx + \int_{-1}^1 (2|x|-1) dx = \left[-\log|x|\right]_{-4}^{-1} +$$

$$+ \int_{-1}^0 (-2x-1) dx + \int_0^1 (2x-1) dx =$$

$$= \log 4 + \left[-x^2 - x\right]_{-1}^0 + \left[x^2 - x\right]_0^1 =$$

$$= \log 4 - (-1+1) + (1-1) = \log 4.$$

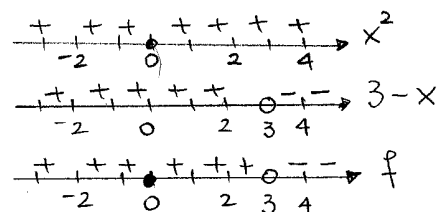
OSS. Sfruttando l'interpretazione geometrica dell'integrale si poteva concludere immediatamente che $\int_{-1}^1 (2|x|-1) dx = 0$!!

iv) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4, 4], 0 \leq y \leq g(x)\}$; allora

$$\text{area } A = \int_{-4}^{-2} ((x+3)^2 + 1) dx = \left[\frac{(x+3)^3}{3} + x\right]_{-4}^{-2} = \left(-\frac{1}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 4\right)$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

5) $f(x) = \frac{x^2}{3-x}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
 • segno di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$x=3$ è asintoto verticale per f

Oss. che esiste anche un asintoto obliquo per f :

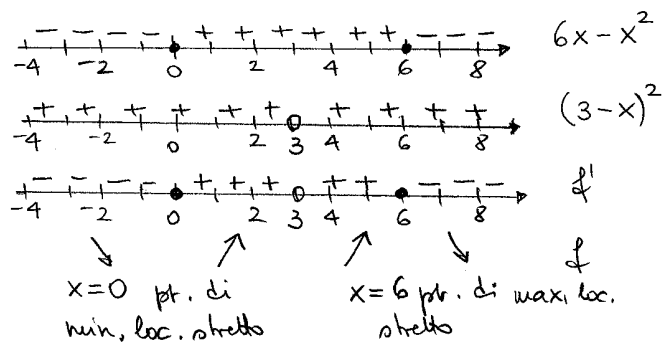
$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (-\infty)}} \frac{x^2}{3x - x^2} = -1;$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (-\infty)}} [f(x) + x] = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (-\infty)}} \left[\frac{3x}{3-x} \right] = -3. \quad \Rightarrow y = -x - 3 \text{ è asintoto obliquo per } f \text{ per } x \rightarrow \begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}$$

• f è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Inoltre

$$f'(x) = \frac{2x(3-x) + x^2}{(3-x)^2} = \frac{6x - x^2}{(3-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 6 \text{ pt. critici per } f$$

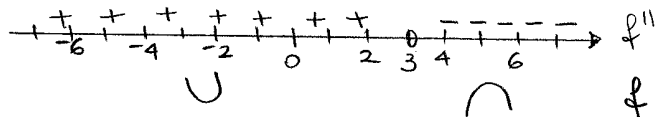


$$f(0) = 0$$

$$f(6) = \frac{36}{3-6} = -12$$

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$f''(x) = \frac{(6-2x)(3-x)^2 + (6x-x^2)2(3-x)}{(3-x)^4} = \frac{18}{(3-x)^3}$$

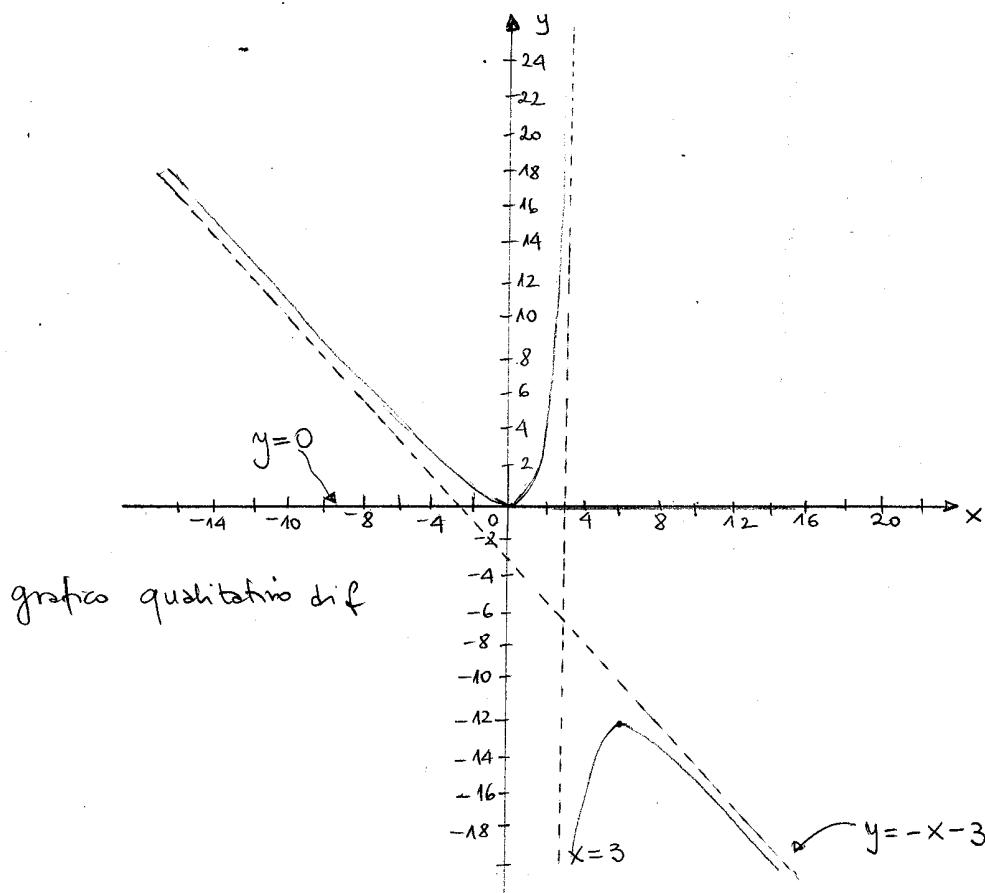


ii) Eq. della retta tg al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$:

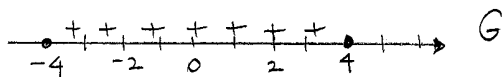
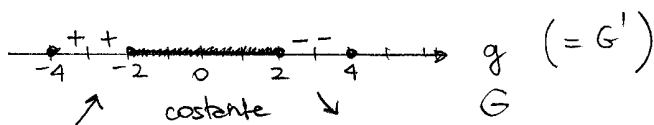
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$$\text{Si ha } y = 0 + 0(x - 0);$$

$\Rightarrow y = 0$ eq. della retta tg. al grafico di f in $(0,0)$.



- 6) i) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $G'(x) = g(x)$ in $[-4, 4]$; dal segno di g segue il segno di G' e quindi la monotonìa di G



(basta usare l'interpretazione geometrica dell'integrale). $\square$

- ii) G è strettamente crescente in $[-4, -2]$, è costante in $[-2, 2]$, è strettamente decrescente in $[2, 4]$. $\square$

NOTA: Poiché $G''(x) = g'(x)$, dal segno di g' si ottiene quello di G'' e quindi la convessità/concavità di G

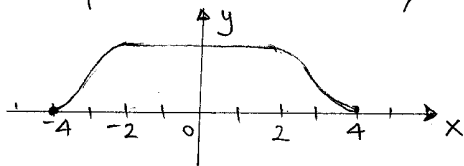


grafico qualitativo di G