

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 Esame scritto di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2009-2010 - Rovereto, 9 giugno 2010

Fila (A)

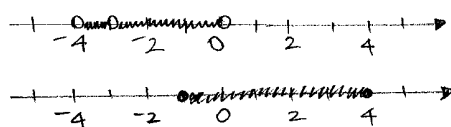
1) i) $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+4x}{|x+3|} < 0\} = \underline{\underline{]-4, 0[\setminus \{-3\}}}$.

$B = \{x \in \mathbb{R} : 2^{|x^2-3x|} - 16 \leq 0\} = \underline{\underline{[-1, 4]}}$.

$2^{|x^2-3x|} \leq 2^4 \Leftrightarrow |x^2-3x| \leq 4$

$\Leftrightarrow -4 \leq x^2-3x \leq 4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+4 \geq 0 \\ x^2-3x-4 \leq 0 \end{cases}$



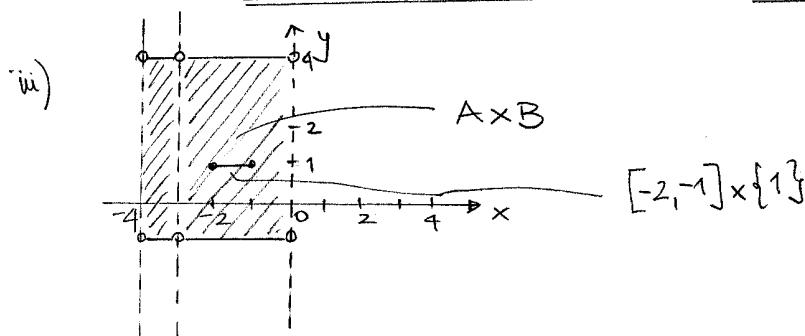
$\text{///} = A$

$\text{///} = B$

□

ii) $A \cup B = \underline{\underline{]-4, 4[\setminus \{-3\}}}$; $A \cap B = \underline{\underline{[-1, 0[}}$; $A \setminus B = \underline{\underline{]-4, -1[\setminus \{-3\}}}$.

□



□

iv) $(x+2)^2 + y^2 = r^2$ con $0 < r < 1$.

□

v) a) $\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, -4] \cup \{-3\} \cup [0, +\infty[$ non è limitato inferiormente e non è limitato superiormente! quindi v) a) (F)

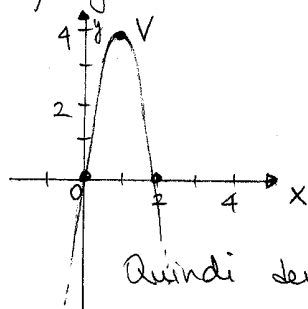
b) $[-2, -1] \times \{1\} \subset A \times B$ (V) (vedi disegno).

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1\} \cap (A \times B) = \emptyset$ (F)

Nota: $(-1, y)$ con $-1 \leq y \leq 4$ appartengono a $A \times B$.

■

2) i) $y = ax^2 + bx + c$



$V = (1, 4)$, $O = (0, 0)$ sono pt. sulla parabola;
essendo V il vertice della parabola, per simmetria
anche $(2, 0)$ appartiene alla parabola.

Quindi deve essere

$$\begin{cases} 4 = a + b + c \\ 0 = c \\ 0 = a \cdot 4 + b \cdot 2 + c \end{cases}$$

da cui $\begin{cases} c = 0 \\ 4 = a + b \\ 0 = 4a + 2b \end{cases} \Rightarrow a = -4, b = 8, c = 0$, e si ha

$$\underline{\underline{y = -4x^2 + 8x.}} \quad \square$$

ii) $y = k$ con $k > 4$.

iii) Sia E la regione piana delimitata dalla parabola $y = -4x^2 + 8x$ e dalla retta $y = -12$.

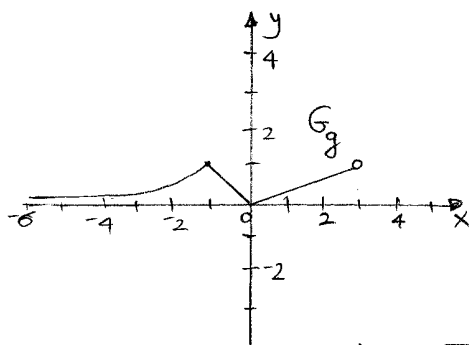
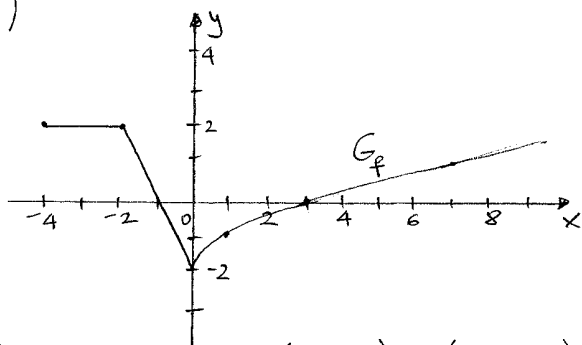
Abbiamo $\begin{cases} y = -12 \\ 4x^2 - 8x - 12 = 0 \end{cases}$ da cui $P_1 = (-1, -12)$
 $P_2 = (3, -12)$.

L'area di E risulta allora

$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_{-1}^3 (-4x^2 + 8x + 12) dx = \left[-4 \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 12x \right]_{-1}^3 = \\ &= \left[\left(-\frac{36}{3} + \frac{36}{3} + 36 \right) - \left(\frac{4}{3} + 4 - 12 \right) \right] = 36 + \frac{20}{3} = \frac{128}{3} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3) i) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$, $\log_2 \frac{1}{2} = -1$, $\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$, $\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$.

ii)



iii) Basta prendere $(x_1 = -4) \neq (x_2 = -3)$; si ha $f(x_1) = f(x_2) (= 2)$. $\square$

- iv) $[-4, -2]$ monotona crescente (= decrescente) poiché f è costante
 $[-2, 0]$ strettamente decrescente;
 $[0, +\infty[$ strettamente crescente. □

v) $g(]-\infty, 3[) = [0, 1] \subsetneq \mathbb{R}$, e quindi g non è suriettiva. □

vi) $\min_{]-\infty, 3[} g = 0$ $x=0$ pt. di min. $\max_{]-\infty, 3[} g = 1$ $x=-1$ pt. di max. □

vii) $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$.

$(fg)(0) = f(0)g(0) = (-2) \cdot 0 = 0$.

$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) = \frac{f(-1)}{g(-1)} = \frac{0}{1} = 0$.

$\left(\frac{g}{f}\right)(-1) \nexists$ poiché $f(-1) = 0$. ■

4) i) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. □

ii) f non è limitata superiormente e quindi non è limitata. □

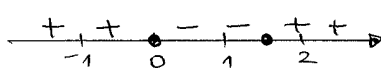
iii) $A = \{x \in [-4, 2] : f(x) = 0\} = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$.

$B = \{x \in [-4, 2] : f'(x) = 0\} = \{-2, 0\}$. □

iv) si ha $\int_{-4}^{-1} f(x) dx < 0$. ■

5) $f(x) = (2x^2 - 3x)e^x$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

•  $f(x)$ (ricorda: $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

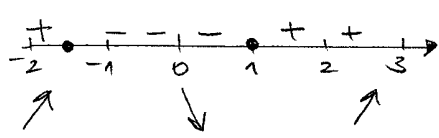
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

$y=0$ è asintoto orizzontale per f per $x \rightarrow -\infty$.

• f è continua su $\mathbb{R}$, poiché prodotto di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = (4x - 3)e^x + (2x^2 - 3x)e^x$
 $= (2x^2 + x - 3)e^x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3}{2}, 1\right\}$ pt. critici

 $f'(x)$
 $f(x)$

$x = -\frac{3}{2}$ pt. di max loc. stretta e
 $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \underline{\underline{9e^{-3/2}}} \sim 2$

$x = 1$ pt. di univ. loc. stretto e $f(1) = -e$.

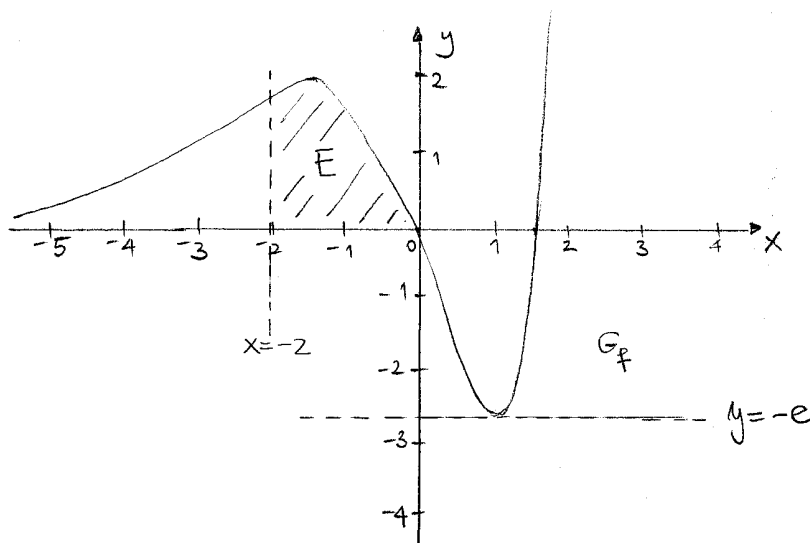


grafico qualitativo!



ii) $y = -e$.

iii) $F(x) = (2x^2 - 7x + 7)e^x$ è funzione derivabile e

$$F'(x) = (4x - 7)e^x + (2x^2 - 7x + 7)e^x = (2x^2 - 3x)e^x = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi F è una funzione primitiva di f .



iv) area $E = \int_{-2}^0 f(x) dx = [F(x)]_{-2}^0 = F(0) - F(-2)$

$$= (7) - (8 + 14 + 7)e^{-2} = \underline{\underline{7 - \frac{29}{e^2}}}.$$



6) i) $\sum_{n=1}^5 (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$ se $f(x) = x^2 - 1$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^5 (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right) &= -\left(1 - 1\right) + \left(\frac{1}{4} - 1\right) - \left(\frac{1}{9} - 1\right) + \left(\frac{1}{16} - 1\right) - \left(\frac{1}{25} - 1\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} = \underline{\underline{\frac{5}{16} - \frac{1}{9} - \frac{1}{25}}}. \end{aligned}$$

ii) $\sum_{k=1}^4 C_{4,k} = C_{4,1} + C_{4,2} + C_{4,3} + C_{4,4}$

$$= \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{4!}$$

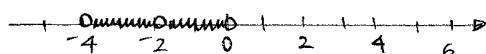
$$= 4 + 6 + 4 + 1 = \underline{\underline{15}}.$$



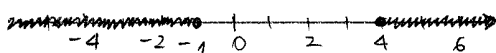
FILA (B) (si procede come negli esercizi di FILA (A))

1) i) $A =]-4, 0[\setminus \{-2\}$;

$B =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[$.



III = A

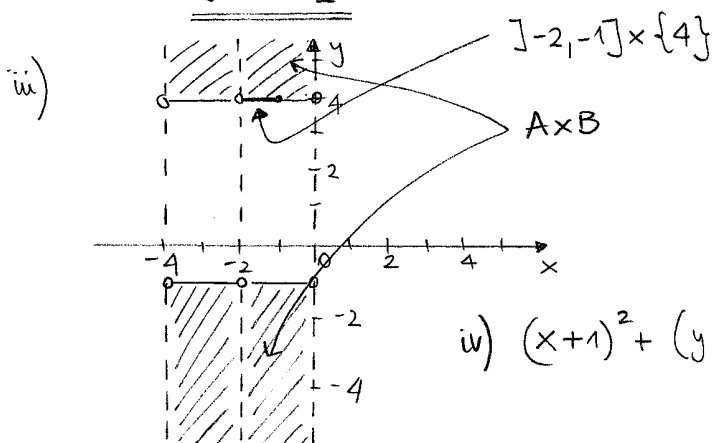


III = B



ii) $A \cup B =]-\infty, 0[\cup [4, +\infty[$; $A \cap B =]-4, -2[\cup]-2, -1]$

$A \setminus B =]-1, 0[$.



iv) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = r^2$ con $0 < r < 1$.



v) a) $\mathbb{R} \setminus B =]-1, 4[$ insieme limitato (V);

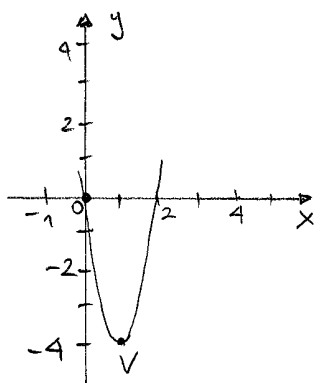
b) $]-2, -1] \times \{4\} \subset A \times B$ (V)

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -1\} \cap (A \times B) = \emptyset$ (F)

Nota: $(-1, y)$ con $y \leq -1$ oppure $y \geq 4$ appartengono ad $A \times B$.



2) i) $y = ax^2 + bx + c$



$V = (1, -4)$, $O = (0, 0)$ sono pt. sulla parabola; essendo V il vertice della parabola, per simmetria anche $(2, 0)$ appartiene alla parabola.

Quindi deve essere

$$\begin{cases} -4 = a + b + c \\ 0 = c \\ 0 = a \cdot 4 + b \cdot 2 + c \end{cases}$$

da cui $\begin{cases} c=0 \\ -4=a+b \\ 0=4a+2b \end{cases} \Rightarrow a=4, b=-8, c=0, \text{ e mi ha}$
 $\underline{y=4x^2-8x.}$ $\square$

ii) $\underline{y=k \text{ con } k < -4.}$ $\square$

iii) Sia E la regione piana delimitata dalla parabola $y=4x^2-8x$ e dalla retta $y=12$.

Procedendo come in Es. 2) iii) FILA (A) mi ha

$$\text{area } E = \int_{-1}^3 (12 - 4x^2 + 8x) dx = \frac{128}{3}.$$

3) i) Vedi FILA (A), Es. 3

ii) Inventare i grafici dell'es. 3; FILA (A).

iii) Basta prendere $(x_1 = -\frac{1}{3}) \neq (x_2 = 1)$ e mi ha $f(x_1) = f(x_2) (= \frac{1}{3})$ $\square$

iv) $]-\infty, -1]$ f è strett. crescente;
 $[-1, 0]$ f è strett. decrescente;
 $[0, 3[$ f è strett. crescente. $\square$

v) $g([-4, +\infty[) = [-2, +\infty[\subsetneq \mathbb{R}$, e quindi g non è suriettiva. $\square$

vi) $\min_{[-4, +\infty[} g = -2$ $x=0$ pt. di minimo.
 $\nexists \max_{[-4, +\infty[} g.$ $\square$

vii) $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = \frac{4}{3} - 1 = -\frac{2}{3}.$

$$(fg)(0) = f(0)g(0) = 0 \cdot (-2) = 0.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(-1) \nexists \text{ poich\'e } g(-1)=0; \quad \left(\frac{g}{f}\right)(-1) = \frac{g(-1)}{f(-1)} = \frac{0}{1} = 0$$

4) i) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.



ii) f non è limitata, perché non è limitata inferiormente.



iii) $A = \{x \in [-4, 2] : f(x) = 0\} = \{-3, 0, 2\}$.

$B = \{x \in [-4, 2] : f'(x) = 0\} = \{-2\}$.



iv) $\int_{-4}^{-1} f(x) dx > 0$.



5) i) $f(x) = (-2x^2 + 3x)e^x$ è la funzione in Es.5, Fila (A), combinata di seguito.

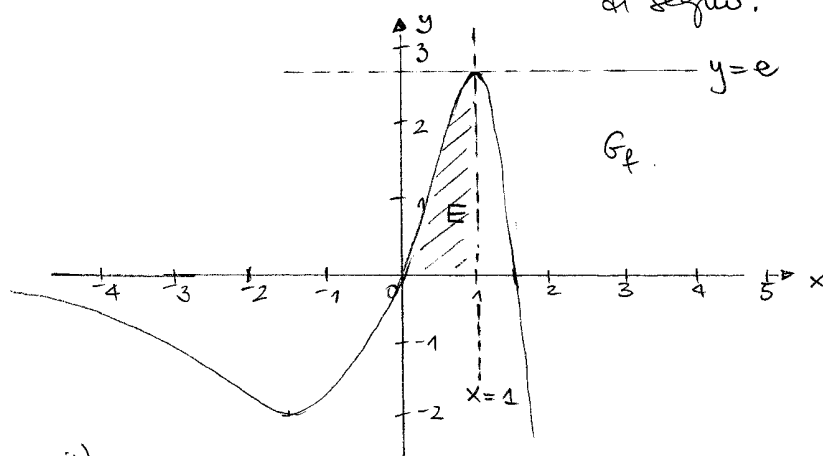


grafico qualitativo!



ii) $y = e$,

iii) Come in Es.5, Fila (A),

iv) area $E = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) =$
 $= (-2 + \cancel{7} - \cancel{7})e - (-7) = \underline{\underline{7 - 2e}}$.



6) i) $\sum_{n=1}^5 (-1)^n f(\frac{1}{n})$ se $f(x) = -x^2 + 1$

$\sum_{n=1}^5 (-1)^n f(\frac{1}{n}) = -(\cancel{-1+1}) + (-\frac{1}{4} + 1) - (-\frac{1}{9} + 1) + (-\frac{1}{16} + 1) - (-\frac{1}{25} + 1)$
 $= -\frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} = \underline{\underline{-\frac{5}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}}}$.

ii) $\sum_{k=1}^4 D_{4,k} = D_{4,1} + D_{4,2} + D_{4,3} + D_{4,4}$
 $= \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{1!} + \frac{4!}{0!} = 4 + 12 + 4! + 4! = \underline{\underline{64}}$.

