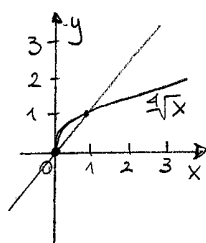


Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2009/10 - Trento, 16-20 novembre 2009

1) Definiamo la funzione $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 4x - 3$ su $[-1, 0]$. Allora $x_0 \in [-1, 0]$ è soluzione dell'eq. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4x + 3$ se e solo se x_0 è uno zero della funzione f . Poiché f è una funzione continua su $[-1, 0]$ (somma di funzioni continue), $f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 4(-1) - 3 = 2 + 4 - 3 = 3 > 0$ e $f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 - 3 = -2 < 0$, dal teorema di esistenza degli zeri segue che esiste $x_0 \in]-1, 0[$ t.c. $f(x_0) = 0$, e quindi x_0 soluzione dell'eq. data. Poiché $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ è decrescente, $-4x - 3$ è decrescente, si ha che f è decrescente e quindi x_0 è l'unico zero di f , e quindi l'unica soluzione dell'eq. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4x + 3$.

Vogliamo ora determinare un intervallo $] \tilde{a}, \tilde{b} [\subset]-1, 0[$ t.c. $x_0 \in] \tilde{a}, \tilde{b} [$ e $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$. Consideriamo per questo il punto medio di $[-1, 0]$, ossia $a_1 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$. Abbiamo che $f(a_1) = f(-\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 4(-\frac{1}{2}) - 3 = \sqrt{2} - 1 > 0$ e quindi x_0 cadrà nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, 0]$. Consideriamo allora $a_2 = \frac{-\frac{1}{2}+0}{2} = -\frac{1}{4}$ e $f(a_2) = f(-\frac{1}{4}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{4}} - 4(-\frac{1}{4}) - 3 = \sqrt[4]{2} - 2 < 0$ (poiché $\sqrt[4]{x} < x$ per ogni $x > 1$). Possiamo allora assicurare che $x_0 \in]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}[$ e prendere $\tilde{a} = -\frac{1}{2}$, $\tilde{b} = -\frac{1}{4}$ avendo $\tilde{b} - \tilde{a} = \frac{1}{4}$. ■



2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{se } x < -2 \\ (x+1)^2 & \text{se } -2 \leq x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{3}{2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = \underline{\underline{0}}$;

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+2} = \underline{\underline{-\infty}}$;

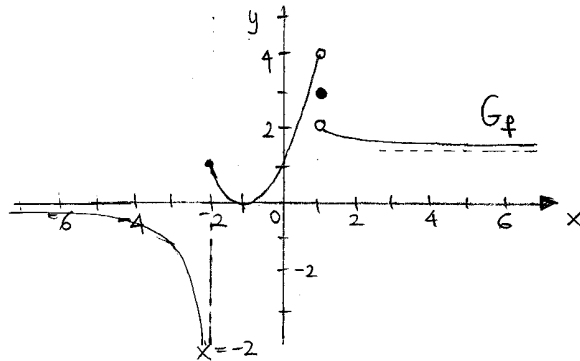
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+1)^2 = \underline{1} = \underline{f(-2)} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1)^2 = \underline{4} ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x + \frac{3}{2} \right] = \underline{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^x + \frac{3}{2} \right] = \underline{\frac{3}{2}} .$$

□

ii)



□

iii) Da quanto ottenuto in i) si ha che $\nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$; inoltre $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Risulta che i pt. $x = -2$ e $x = 1$ sono pt. di discontinuità della f ; si ha la continuità di f in tutti i pt. di $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$. ■

$$3) a) \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^3 - 1) = \underline{7} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} (2\sqrt{x} + \log x) = \underline{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{2x} = \underline{1} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \underline{+\infty} ;$$

□

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \underline{-\infty} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{|x| - 1} = \underline{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{|x| - 1} = \underline{-\infty} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2^{x+1} - 1}{x} = \underline{-\infty} ;$$

□

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{x+1} - 1}{x} = \underline{+\infty} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^3} \nexists \text{ poiché } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^3} = \underline{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^3} = \underline{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} + 2}{e^{-x} + 3} = \underline{\frac{2}{3}} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x}{5 - x^2} = \underline{-4} ;$$

□

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 1}{2 - x^3} = \underline{+\infty} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x}{1 - x^4} = \underline{0}$$

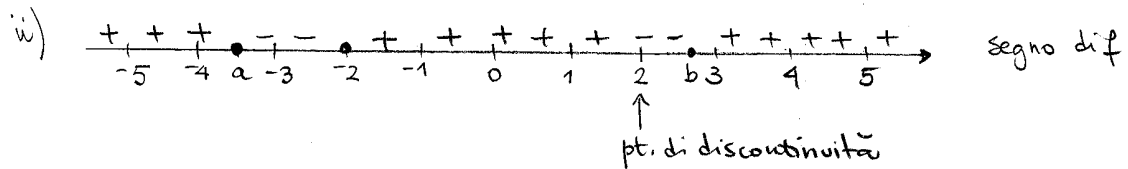
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{2^x - 1} = \underline{-4} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{2^x - 1} = \underline{0} .$$

■

$$4) i) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{+\infty} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \underline{1} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \underline{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \underline{0} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \underline{-1} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{2}.$$

□



iii) f è discontinua in $x = -1$ e $x = 2$.

□

$$iv) \min_{[-2, -1]} f = 0 \quad x = -2 \text{ pt. di minimo}$$

$$\max_{[-2, -1]} f = f(-1) \quad x = -1 \text{ pt. di massimo.}$$

$$\min_{[-2, 2]} f = 0 \quad x = -2 \text{ pt. di minimo.}$$

$$\cancel{\max_{[-2, 2]} f}$$

Osserviamo che f è continua sull'intervallo $[3, 4]$; le ipotesi del teorema di Weierstrass sono soddisfatte.

■