

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie delle Comunicazioni
 ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2009/10 - PRIMA PROVA INTERMEDIA - Rovereto, 9 ottobre 2009

FILA (A)

1) i) "Domani pomeriggio non vado a Verona e non studio in biblioteca". $\square$

ii) a) "C'è almeno un capoluogo di provincia nel quale vengono rappresentati tutti gli spettacoli d'avanguardia".

b) "C'è almeno un capoluogo di provincia nel quale viene rappresentato uno spettacolo d'avanguardia".

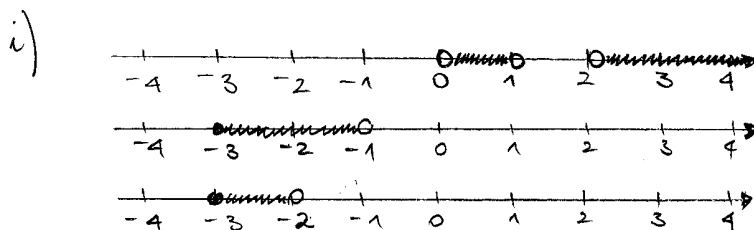
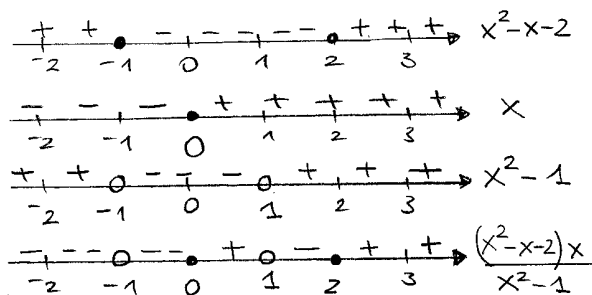
c) "Per ogni spettacolo d'avanguardia c'è almeno un capoluogo di provincia nel quale viene rappresentato". $\blacksquare$

2) $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{(x^2 - x - 2)x}{x^2 - 1} > 0\}$

$= \underline{\underline{]0, 1[\cup]2, +\infty[}}$;

$B = \underline{\underline{[-3, -1[}}$;

$C = \underline{\underline{[-3, -2[}}$.



A

B

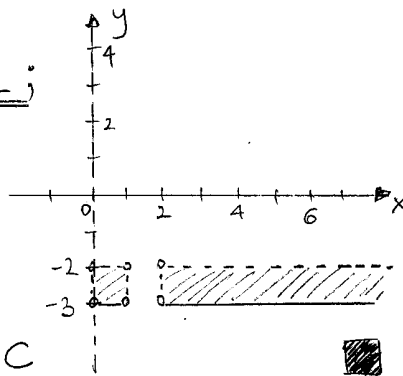
C



ii) $A \cup B = \underline{\underline{[-3, -1[\cup]0, 1[\cup]2, +\infty[}}$;

$B \cap C = C = \underline{\underline{[-3, -2[}}$;

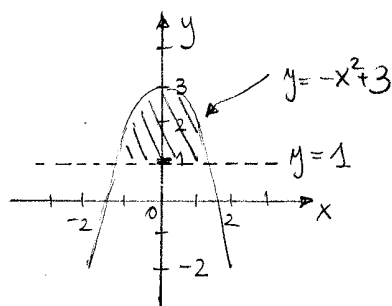
$B \setminus C = \underline{\underline{[-2, -1[}}$.



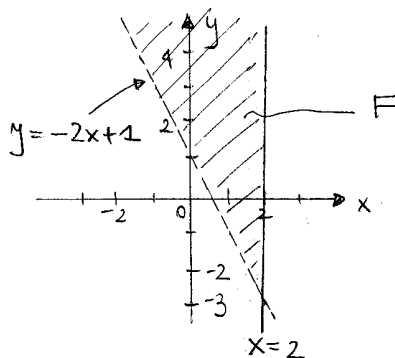
$\text{///} = A \times C$



3) i)



$\text{///} = E$



□

ii) eq. delle rette orizzontali che intersecano E : $y = k, 1 < k \leq 3$

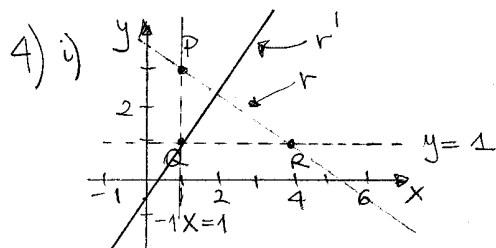
eq. delle rette verticali che intersecano F : $x = k, k \leq 2$. □

iii) $\{(x, 2) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\} \subset E$ (V) : infatti, per $y = 2$
 si ha $-1 \leq x \leq 1$ affinché
 $(x, 2) \in E$;

$E \cap F \neq \emptyset$ (V) : basta osservare, per esempio, che
 $(0, 3) \in E \cap F$;

$(-2, 1) \in E$ (F) : $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1$ non appartengono ad E;

$[0, 1] \times [2, 3] \in F$ (F) : non è corretta la scrittura! ■



eq. retta passante per

$P \in Q : \underline{x = 1}$;

$Q \in R : \underline{y = 1}$;

$P \in R : \frac{y-3}{1-3} = \frac{x-1}{4-1}$

$\Leftrightarrow \underline{y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}}$. □

ii) la retta r' perpendicolare

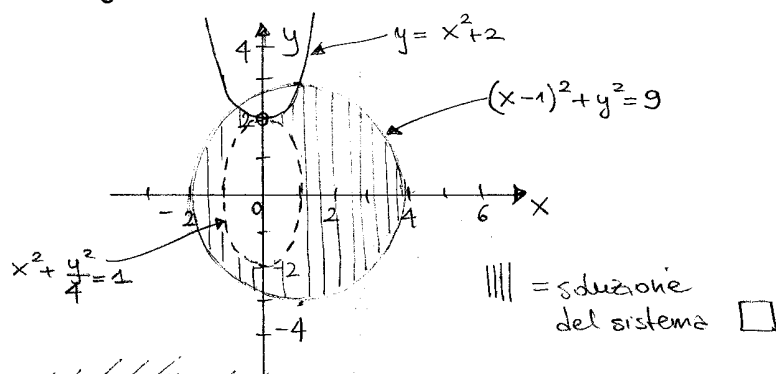
alla retta r di eq. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$

e passante per Q è data da $y = 1 + \frac{3}{2}(x-1)$, ossia

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. □

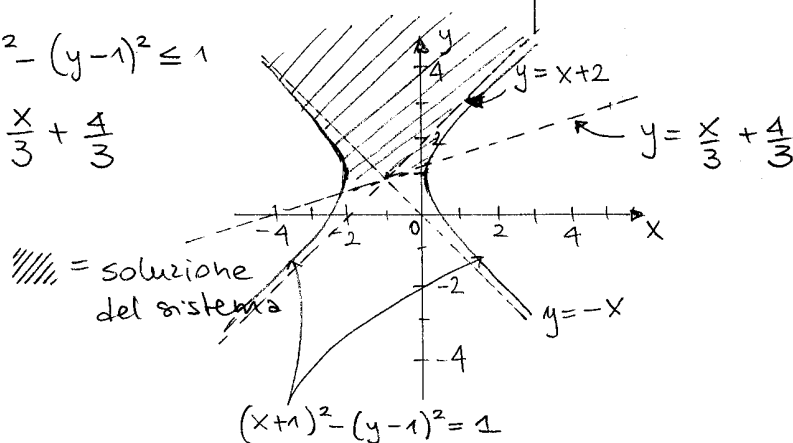
iii) Perimetro del triangolo di vertici $P, Q, R = 2 + 3 + \sqrt{4+9} =$
 $= 5 + \sqrt{13}$. ■

$$5) \begin{cases} y \leq x^2 + 2 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} > 1 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$



$$(x+1)^2 - (y-1)^2 \leq 1$$

$$y > \frac{x}{3} + \frac{4}{3}$$



FILA (B)

1) i) "L'estate prossima non mi laureo e non vado a lavorare". □

ii) a) "C'è almeno una rassegna cinematografica che ha luogo in ogni capoluogo di provincia lombardo."

b) "C'è almeno un capoluogo di provincia lombardo in cui hanno luogo tutte le rassegne cinematografiche."

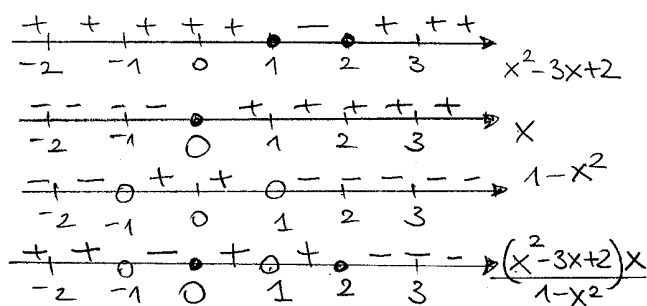
c) "Ogni rassegna cinematografica ha luogo in almeno un capoluogo di provincia lombardo." ■

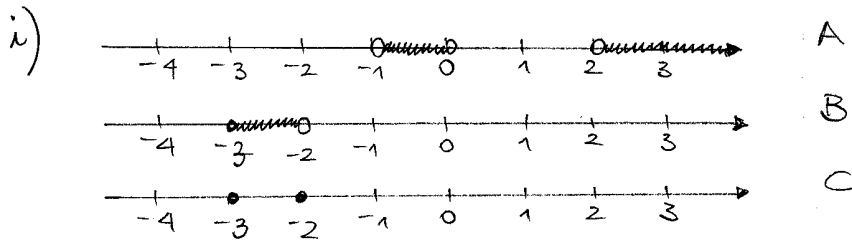
$$2) A = \left\{ x \in \mathbb{R}; \frac{(x^2 - 3x + 2)x}{1 - x^2} < 0 \right\}$$

$$= \underline{\underline{]-1, 0[\cup]2, +\infty[;}}$$

$$B = \underline{\underline{[-3, -2[;}}$$

$$C = \underline{\underline{\{-3, -2\}}}$$

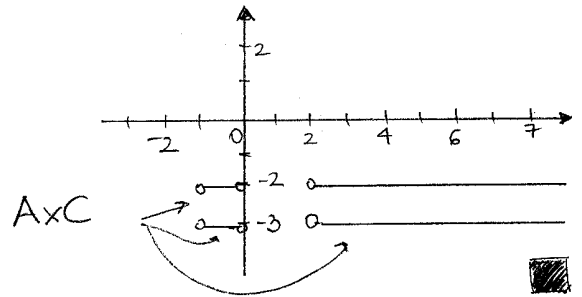




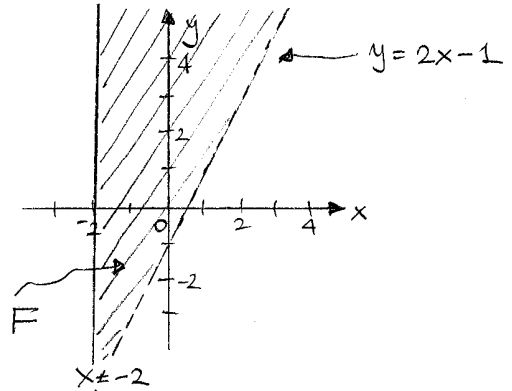
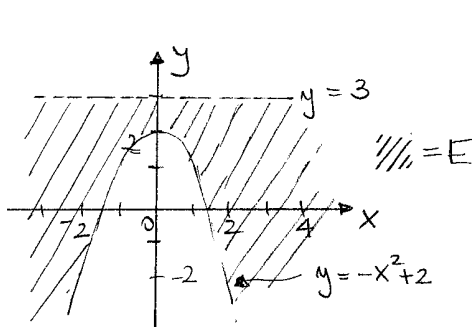
ii) $A \cup B = [-3, -2[\cup]-1, 0[\cup]2, +\infty[$;

$B \cap C = \{-3\}$;

$B \setminus C =]-3, -2[$.



3) i)



ii) eq. delle rette orizzontali che intersecano E : $y = k$, $k < 3$

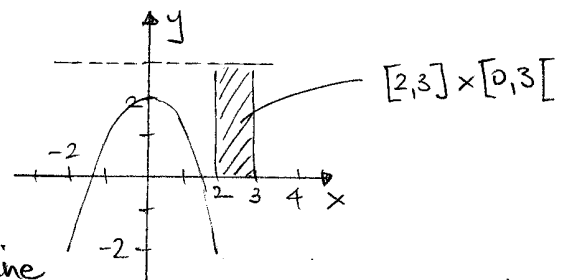
eq. delle rette verticali che intersecano F : $x = k$, $k \geq -2$.

iii) $\{(-2, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\} \subset E$ (✓) : infatti, se $x = -2$ si deve avere $-4 \leq y < 3$ per appartenere ad E e questo è soddisfatto;

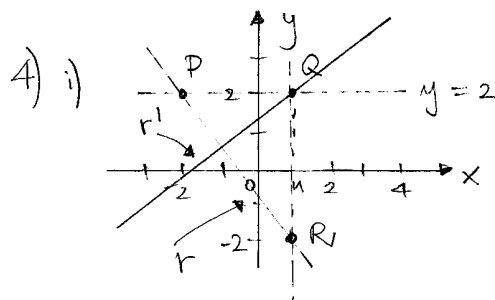
$E \cap F = \emptyset$ (✗) : basta osservare, per esempio, che

$(0, 2) \in E \cap F$;

$[2, 3] \times [0, 3[\subset E$ (✓)



$(0, -2) \in F$ (✗) poiché non viene verificato $y > 2x - 1$!!



eq. retta passante per

P e Q : $y = 2$

Q e R : $x = 1$

P e R : $\frac{y+2}{2+2} = \frac{x-1}{-2-1}$

$\Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

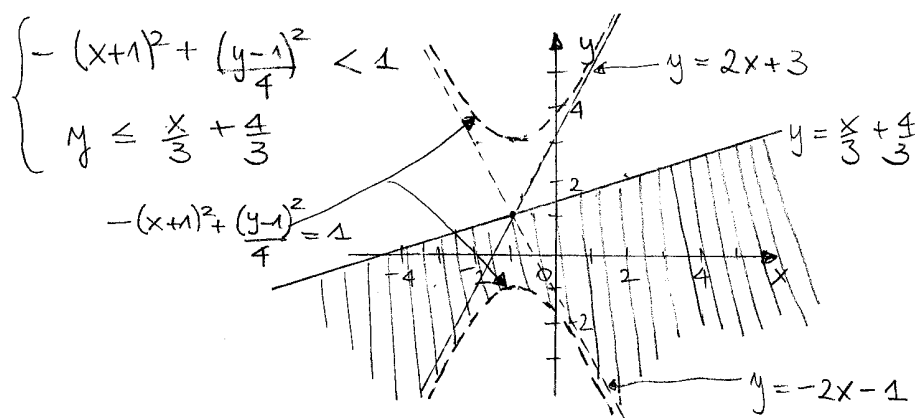
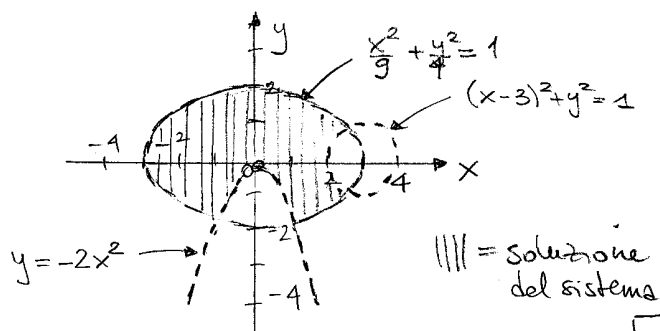
ii) La retta r' perpendicolare alla retta r di eq. $y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

e passante per Q è data da $y = 2 + \frac{3}{4}(x-1)$, ma

$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$

iii) Perimetro del triangolo di vertici $P, Q, R = 3 + 4 + \sqrt{9+16}$
 $= 12$

5)
$$\begin{cases} y > -2x^2 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \\ (x-3)^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$



FILA C

- 1) i) "Nella sessione invernale degli esami non passo l'esame di Psicologia Generale e non mi trasferisco all'Università di Padova." $\square$
- ii) a) "C'è almeno una rassegna cinematografica che ha luogo in ogni capoluogo di provincia lombardo."
- b) "In ogni capoluogo di provincia lombardo ha luogo almeno una rassegna cinematografica."
- c) "C'è almeno un capoluogo di provincia lombardo nel quale hanno luogo tutte le rassegne cinematografiche." $\blacksquare$

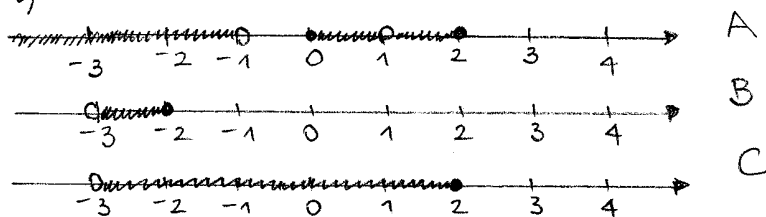
2) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(x^2 - 3x + 2)x}{1 - x^2} \geq 0 \right\} = \underline{\underline{]-\infty, -1[\cup [0, 1[\cup]1, 2] ;}}$

(per lo studio del segno di $\frac{(x^2 - 3x + 2)x}{1 - x^2}$ vedi Fila B Es. 2)

$B = \underline{\underline{]-3, -2] ;}}$

$C = \underline{\underline{]-3, 2] .}}$

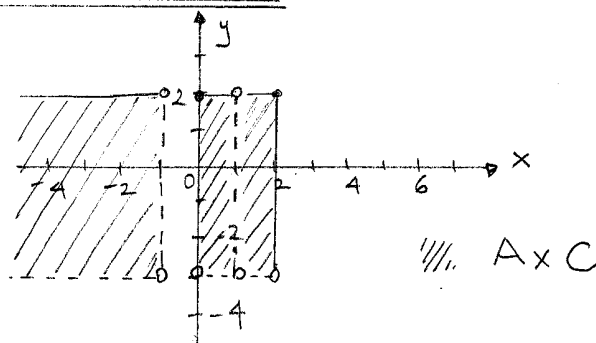
i)



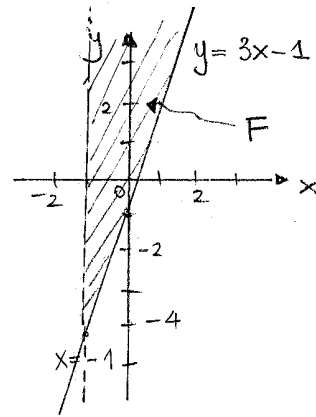
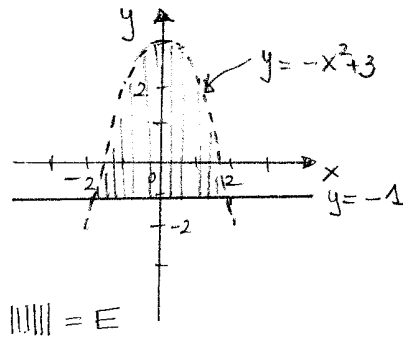
ii) $A \cup C = \underline{\underline{]-\infty, 2] ;}}$

$A \cap C = \underline{\underline{]-3, -1[\cup [0, 1[\cup]1, 2] ;}}$

$B \setminus C = \emptyset$



3) i)



ii) eq. delle rette orizzontali che intersecano E : $y = k, -1 \leq k < 3$

eq. delle rette verticali che intersecano F : $x = k, k > -1$

iii) $\{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\} \subset E$ (V) : infatti, per $x=0$ □

si ha $-1 \leq y < 3$ affinché

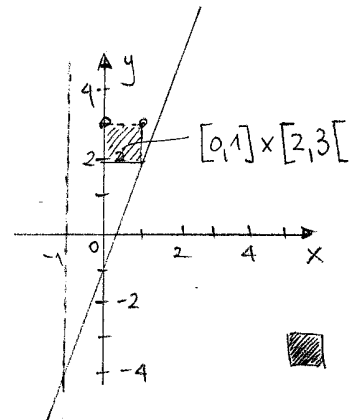
$(0, y) \in E$;

$E \cap F = \emptyset$ (F) : basta prendere, per esempio, $(0, 0)$ e si ha

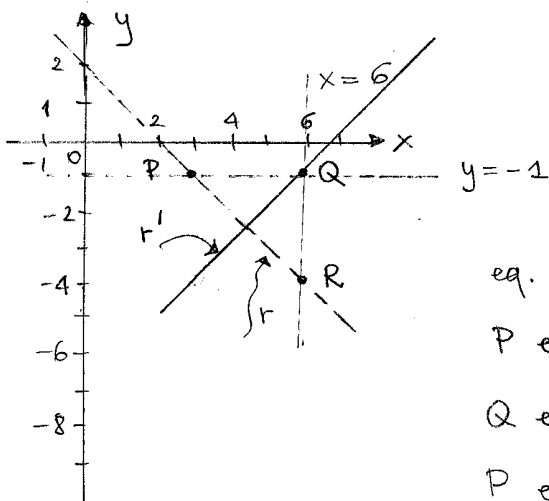
$(0, 0) \in E \cap F$;

$[0, 1] \times [2, 3[\in F$ (F) : è falsa la scrittura!

$[0, 1] \times [2, 3[\subset F$ (V)



4) i)



eq. retta passante per

P e Q : $y = -1$;

Q e R : $x = 6$;

P e R : $\frac{y+1}{-4+1} = \frac{x-3}{6-3}$

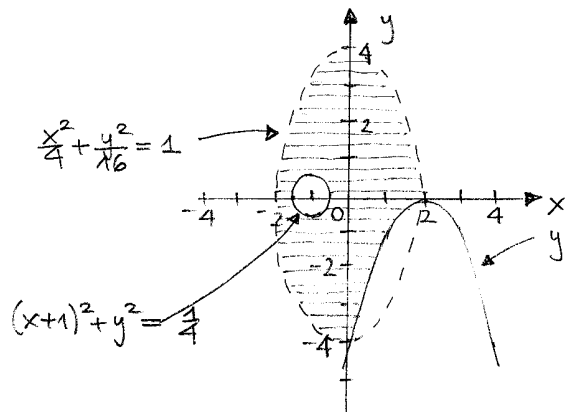
$\Leftrightarrow$ $y = -x + 2$ □

ii) La retta r' perpendicolare ad r di eq. $y = -x + 2$ e passante per Q

è data da $y = -1 + (x - 6)$, ossia $y = x - 7$. □

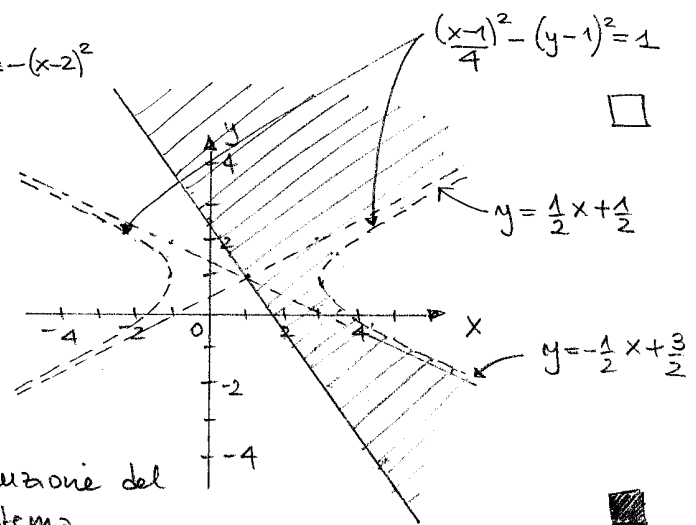
iii) Perimetro del triangolo di vertici P, Q, R = $3+3+\sqrt{9+9} = 6+3\sqrt{2}$. ■

$$5) \begin{cases} y \geq -x^2 + 4x - 4 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1 \\ 4(x^2 + 2x) + 4y^2 + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -(x-2)^2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} < 1 \\ (x+1)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$



≡ = soluzione del sistema.

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{1} < 1 \\ y \geq -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \end{cases}$$



≡ = soluzione del sistema.

FILA (D)

1) i) "Domani in ufficio non termino il lavoro e non mi porto del lavoro a casa." □

ii) a) "C'è almeno uno spettacolo teatrale che viene rappresentato in ogni capoluogo di regione."

b) "In ogni capoluogo di regione viene rappresentato almeno uno spettacolo teatrale."

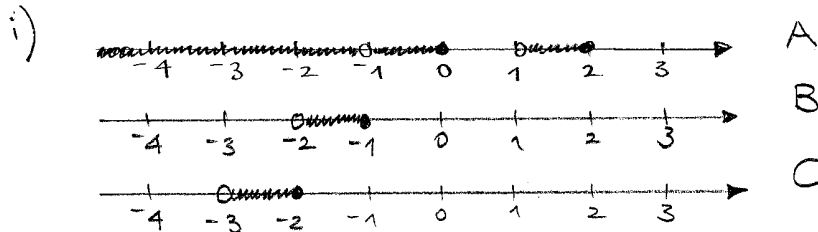
c) "C'è almeno uno spettacolo teatrale che viene rappresentato in almeno un capoluogo di regione." ■

$$2) A = \{x \in \mathbb{R}; \frac{(x^2 - x - 2)x}{x^2 - 1} \leq 0\} = \underline{\underline{]-\infty, -1[\cup]-1, 0] \cup]1, 2]}}$$

(per lo studio del segno di $\frac{(x^2 - x - 2)x}{x^2 - 1}$ vedi Fila (A) Es. 2)

$$B = \underline{\underline{]-2, -1]}}$$

$$C = \underline{\underline{]-3, -2]}}$$

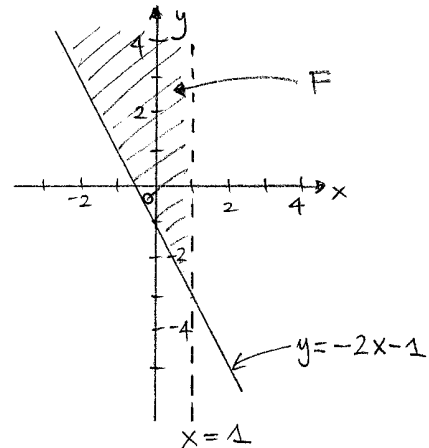
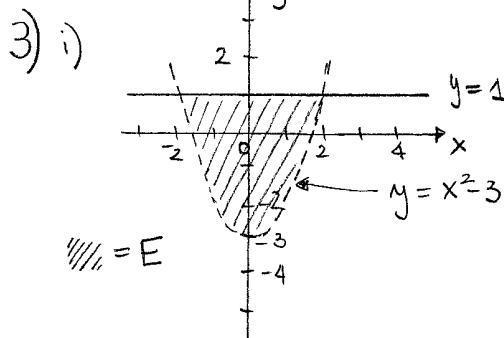
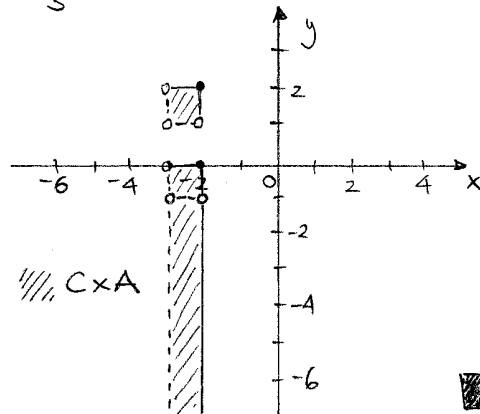


ii)

$$B \cup C = \underline{\underline{]-3, -1]}}$$

$$A \cap C = C = \underline{\underline{]-3, -2]}}$$

$$C \setminus B = C = \underline{\underline{]-3, -2]}}$$



ii) eq. delle rette orizzontali che intersecano

$$E : \underline{\underline{y = k, -3 < k \leq 1}}$$

eq. delle rette verticali che intersecano F : $\underline{\underline{x = k, k < 1.}}$

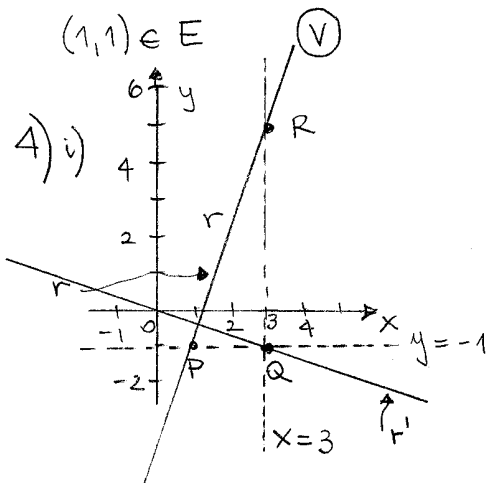
iii) $\{(1, y) \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\} \subset E$ (V) ; infatti, per $x = 1$

si ha $-2 < y \leq 1$ affinché $(1, y) \in E$;

$E \cap F = \emptyset$ (F) : per esempio $(0,0) \in E \cap F$;

$[0,1] \times [2,3[\subset F$ (F) poiché $x=1$ non è possibile per $(x,y) \in F$;

$(1,1) \in E$



eq. retta passante per

P e Q : $y = -1$;

Q e R : $x = 3$;

P e R : $\frac{y-5}{-1-5} = \frac{x-3}{1-3}$

$\Leftrightarrow y = 3x - 4$.

ii) la retta r' perpendicolare alla retta r di eq. $y = 3x - 4$ e passante per Q è data da $y = -1 - \frac{1}{3}(x-3)$, ossia $y = -\frac{1}{3}x$.

iii) Perimetro del triangolo di vertici P, Q, R = $2 + 6 + \sqrt{4+36} = 8 + 2\sqrt{10}$

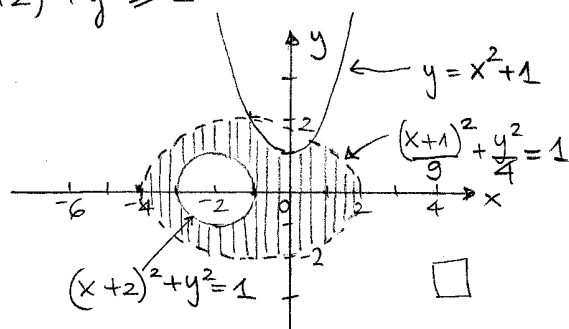
5)
$$\begin{cases} y \leq x^2 + 1 \\ 4(x^2 + 2x) + 9y^2 - 32 < 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1 \\ (x+2)^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

$y \leq x^2 + 1$

$\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$

$(x+2)^2 + y^2 \geq 1$

||| = soluzione del sistema



$$\begin{cases} -(x-1)^2 + 4(y-1)^2 \geq 4 \\ y < 3x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{(x-1)^2}{4} + (y-1)^2 \geq 1 \\ y < 3x - 2 \end{cases}$$

