

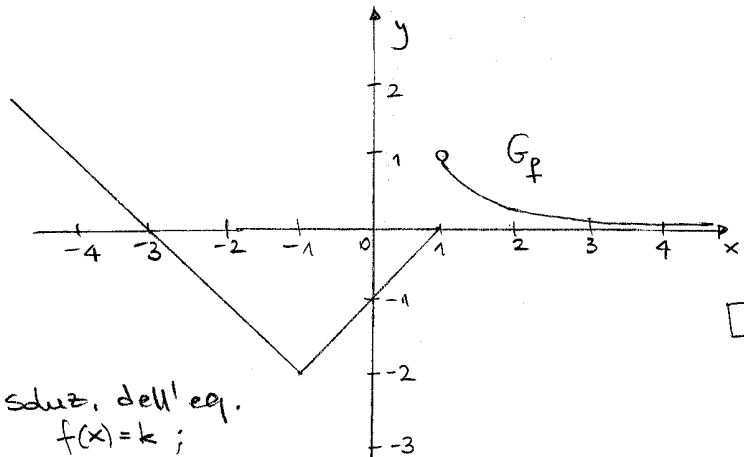
Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologia della Comunicazione
 ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

a.a. 2009/10 - SECONDA PROVA INTERMEDIA - Rovereto, 13 novembre 2009

FILA (A)

1) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| - 2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



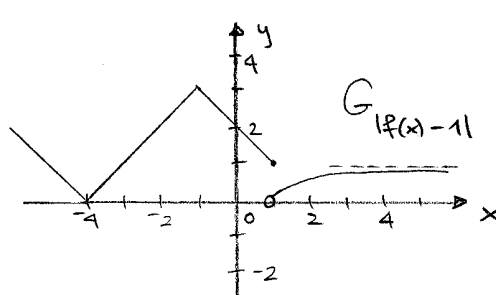
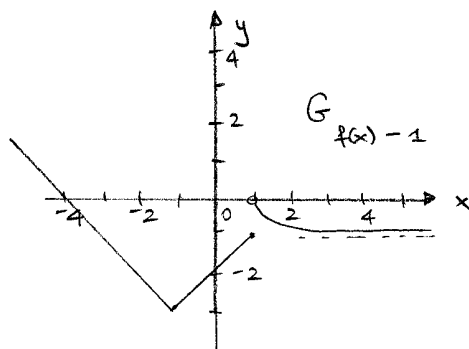
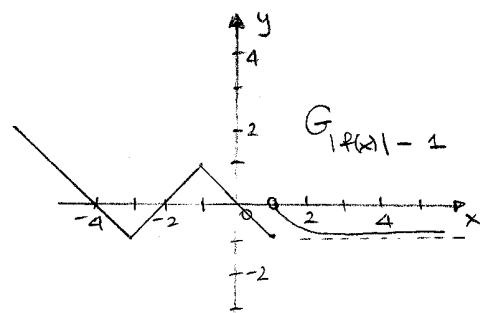
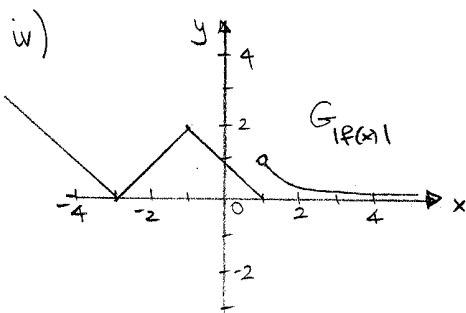
ii) se $k < -2$ Non sono soluz. dell'eq.
 $f(x) = k$;

$k = -2$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$;

$-2 < k < 1$ Sono due soluzioni "

$k \geq 1$ $\exists$ una soluzione " .

iii) f ristretta all'intervallo $]-\infty, -1]$ è decrescente, così come
 lo è se ristretta all'intervallo $]1, +\infty[$; f ristretta all'intervallo
 $[-1, 1]$ è invece crescente.

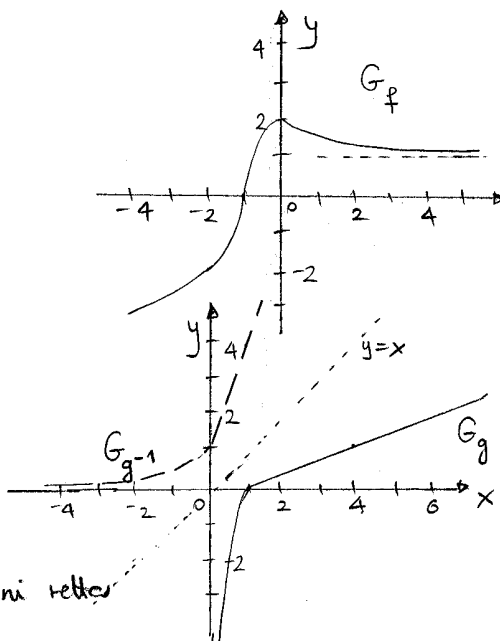


2) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt[3]{x+1} & \text{se } x \leq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} \log_3 x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



ii) f non è iniettiva, poiché ogni retta

di eq. $y = k$, con $1 < k < 2$, interseca il grafico di f in due punti, cioè esistono $x_1, x_2 \in [-1, +\infty[$ con $x_1 \neq x_2$ e t.c. $f(x_1) = f(x_2) = k$.

Abbiamo $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 2] \subsetneq \mathbb{R}$ e quindi f non è suriettiva. □

iii) vedi disegno sopra. □

iv) $\underline{f(]1, +\infty[)} = \underline{]1, \frac{3}{2}[}$

$\underline{g(]1, +\infty[)} = \underline{]0, +\infty[}$. □

v) $(g \circ f)(x) = g(\underbrace{f(x)}_{>1 \text{ se } x > 1}) = \frac{1}{3}f(x) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1\right] - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^x}}$

3) $1 + |x-4| < 3 \Leftrightarrow |x-4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-4 < 2 \Leftrightarrow$
 $2 < x < 6 \Rightarrow \underline{\underline{S =]2, 6[}}$ ■

$|4x^2 - 1| \geq 3 \Leftrightarrow (4x^2 - 1 \leq -3) \circ (4x^2 - 1 \geq 3)$

$\Leftrightarrow (4x^2 \leq -2)_{\text{mai}} \circ (4x^2 \geq 4) \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}}$

$x + x|x| > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x + x^2 > -2 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x - x^2 > -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + x + 2 > 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - x - 2 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ -1 < x < 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]-1, +\infty[}}$

$$x^2 - 3|x+1| = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 - 3(x+1) = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ x^2 + 3(x+1) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < -1 \\ x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -1 \\ 4 \end{cases} \quad \vee \quad = \begin{cases} -2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \{-2, -1, 4\}$$

$$4) i) 2^{-x+x^2} - 2^{-3x} > 0 \Leftrightarrow 2^{-x+x^2} > 2^{-3x} \Leftrightarrow -x+x^2 > -3x$$

$\uparrow$
 $2^x \text{ e } \uparrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x > 0 \Rightarrow S =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[.$$

$$e^{x+x^2+1-2x} \leq e^3 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0$$

$\uparrow$
 $e^x \text{ e } \uparrow$

$$\Rightarrow S = [-4, 2].$$

$$2^{-|x-3|} < 2^{-2} \Leftrightarrow -|x-3| < -2 \Leftrightarrow |x-3| > 2 \Leftrightarrow$$

$\uparrow$
 $2^x \text{ e } \uparrow$

$$(x-3 < -2) \vee (x-3 > 2) \Rightarrow S =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[.$$

$$ii) \log_{1/3} |x-4| > 2 \Leftrightarrow \log_{1/3} |x-4| > \log_{1/3} \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-4| > 0 \\ |x-4| < \frac{1}{9} \end{cases} \quad (\log_{1/3} x \text{ e decrescente!})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ -\frac{1}{9} < x-4 < \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow S =]4-\frac{1}{9}, 4+\frac{1}{9}[\setminus \{4\}.$$

$$x^2(-1) - x(-2) + 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow S =]-\infty, 1-\sqrt{3}] \cup [1+\sqrt{3}, +\infty[.$$

$$\log_3(4-x) + \log_{1/3}(x+3) \leq 0 \Leftrightarrow \log_3(4-x) - \log_3(x+3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(4-x) \leq \log_3(x+3)$$

$$\left(\log_{1/3} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 \frac{1}{3}} = -\log_3 x \right)$$

-4-

$$\begin{cases} 4-x > 0 \\ x+3 > 0 \\ 4-x \leq x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > -3 \\ 2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > -3 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = \underline{\underline{\left[\frac{1}{2}, 4\right]}}$$

5) i) f è limitata, poiché $0 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \in [-2, 3]$;

g è limitata inferiormente, poiché $-1 \leq g(x) \quad \forall x \in [-2, 3]$, ma non è limitata superiormente. $\square$

ii) $\min_{[-2, 3]} f = \underline{\underline{0}} \quad \underline{\underline{x=2}}$ pt. di minimo

$\max_{[-2, 3]} f = \underline{\underline{2}} \quad \underline{\underline{x=-1, x=0}}$ pt. di massimo.

f non soddisfa le ipotesi del teo. di Weierstrass, poiché f non è continua in $x=0$. $\square$

iii) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 2 + 0 = \underline{\underline{2}}$;

$(fg)(3) = f(3) \cdot g(3) = 1 \cdot (-1) = \underline{\underline{-1}}$;

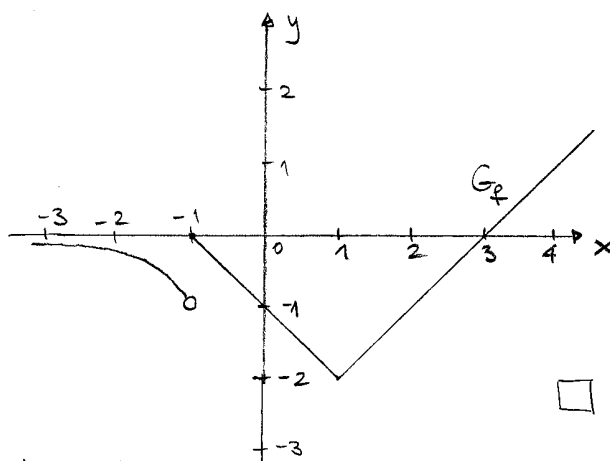
$\left(\frac{f}{g}\right)(0) \nexists$ poiché $g(0)=0$

$\left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$. $\square$

FILA (B)

1) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{se } x < -1 \\ |x-1|-2 & \text{se } x \geq -1 \end{cases}$$



ii) Se $k < -2$ Sono soluzioni dell'eq. $f(x)=k$;

$k = -2$ È una soluzione " ;

$-2 < k \leq -1$ Sono 2 soluzioni "

$-1 < k < 0$ Sono 3 soluzioni dell'eq. $f(x)=k$;

$k=0$ Sono 2 soluzioni "

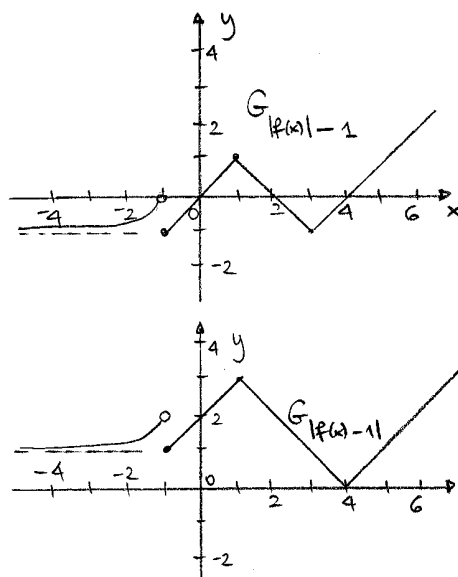
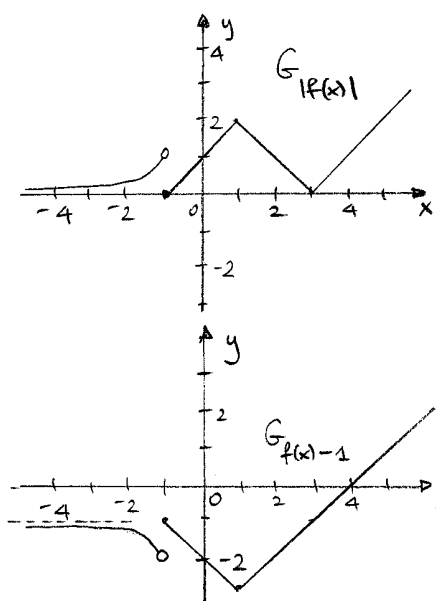
$k > 0$ È una soluzione "



iii) f ristretta all'intervallo $]-\infty, -1[$ è decrescente, così come è decrescente se ristretta all'intervallo $[-1, 1]$. Risulta invece crescente se f è ristretta all'intervallo $[1, +\infty[$.



iv)



2) i) f non è limitata inferiormente; è limitata superiormente poiché $f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [-3, 2]$;

g è limitata, poiché $-1 \leq g(x) \leq 1 \quad \forall x \in [-3, 2]$.



ii) $\min_{[-3,2]} g = \underline{\underline{-1}} \quad \underline{\underline{x=-2}}, \underline{\underline{x=0}}, \underline{\underline{x=2}}$ sono pt. di minimo.

$\max_{[-3,2]} g = \underline{\underline{1}} \quad \underline{\underline{x=-3}}$ pt. di massimo.

g non soddisfa le ipotesi del tes. di Weierstrass poiché g non è continua in $x=0$.



iii) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + (-1) = \underline{\underline{-1}}$;

$(fg)(0) = f(0) \cdot g(0) = 0 \cdot (-1) = \underline{\underline{0}}$;

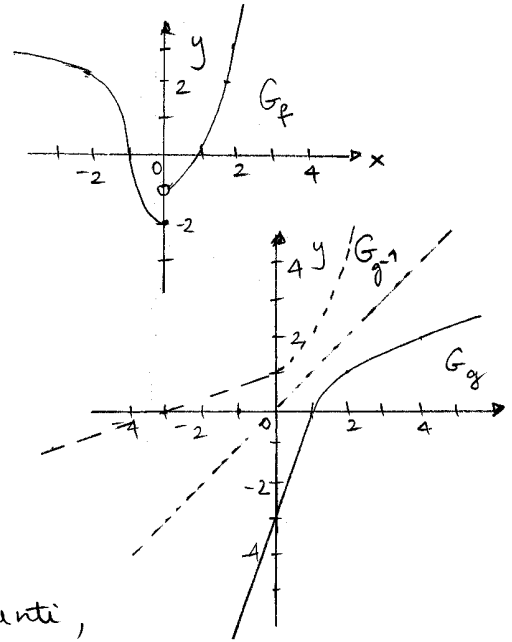
$\left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{0}{-1} = \underline{\underline{0}}$; $\left(\frac{g}{f}\right)(2) \nexists$ poiché $f(2)=0$.



3) i) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -2\sqrt[3]{x+1} & \text{se } x \leq 0 \\ 2^x - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3x - 3 & \text{se } x \leq 1 \\ \log_2 x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



ii) f non è iniettiva, poiché ogni

retta di eq. $y = k$ con $k > -1$

interseca il grafico di f in due punti,

cioè esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ e t.c. $f(x_1) = f(x_2) = k$.

Abbiamo $f(\mathbb{R}) = [-2, +\infty[\subsetneq \mathbb{R}$ e quindi f non è suriettiva $\square$

iii) vedi disegno sopra. $\square$

iv) $\underline{f([2, +\infty[) = [2, +\infty[}$; $\underline{g([2, +\infty[) = [1, +\infty[}$. $\square$

v) $\underline{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$ $\underline{= \log_2(2^x - 2)}$ $\square$
 $\quad \quad \quad > 2 \text{ per } x \geq 2$

4) $|x+3| - 1 \leq 2 \Leftrightarrow |x+3| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x+3 \leq 3$
 $\Leftrightarrow -6 \leq x \leq 0 \Rightarrow \underline{S = [-6, 0]}$.

$|x(x-2)| > 3 \Leftrightarrow (x^2 - 2x < -3) \circ (x^2 - 2x > 3)$
 $\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 3 < 0) \circ (x^2 - 2x - 3 > 0)$
 $\Leftrightarrow (\text{nessuna soluzione}) \circ (x < -1 \circ x > 3)$
 $\Rightarrow \underline{S =]-\infty, -1[\cup]3, +\infty[}$.

$x - 2x|x| \leq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2x^2 + 1 \leq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x + 2x^2 + 1 \leq 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - x - 1 \geq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 + x + 1 \leq 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -\frac{1}{2} \circ x \geq 1 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ \emptyset \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{S = [1, +\infty[}$.

$$x^2 - 2|x-3| = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2 - 2(x-3) = -3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x-3 < 0 \\ x^2 + 2(x-3) = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 2x + 9 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 3 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S = \{-3, 1\}}}$$

5) i) $e^{|x-4|} < e$ $\Leftrightarrow$ $|x-4| < 1$ $\Leftrightarrow$ $-1 < x-4 < 1$

$e^x \uparrow$ $\Leftrightarrow$ $3 < x < 5 \Rightarrow \underline{\underline{S =]3, 5[}}$

$$2^{x+x^2-1-4x} > 2^3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 1 > 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 > 0$$

$2^x \uparrow$ $\Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[}}$

$$3^{-x} \cdot 3^{-x^2} - 3^{-4x} \leq 0 \Leftrightarrow 3^{-x^2-x} \leq 3^{-4x} \Leftrightarrow -x^2 - x \leq -4x$$

$3^x \uparrow$ $\Leftrightarrow x^2 - 3x \geq 0 \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[}}$

ii) $x^2(-1) - x(-3) + 4 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[}}$

$$\log_{1/4} |x-2| > -2 \Leftrightarrow \log_{1/4} |x-2| > \log_{1/4} 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| > 0 \\ |x-2| < 16 \end{cases} \quad (\log_{1/4} x \text{ e' decrescente!})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ -16 < x-2 < 16 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]-14, 18[\setminus \{2\}}}$$

$$\log(3-x) + \log_{1/e}(x+4) \geq 0 \Leftrightarrow \log(3-x) - \log(x+4) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log(3-x) \geq \log(x+4)$$

$\left(\log_{1/e} x = \frac{\log x}{\log_{1/e} e} = -\log x \right)$

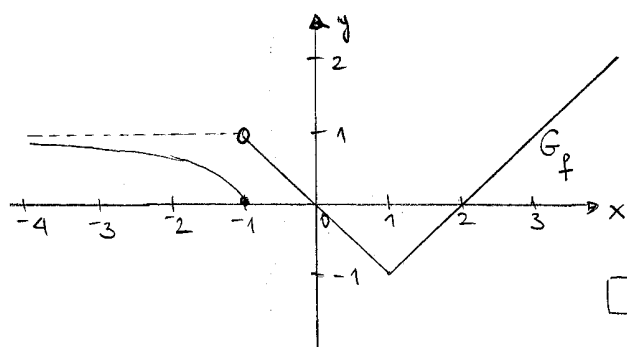
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x > 0 \\ x+4 > 0 \\ 3-x \geq x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -4 \\ 2x \leq -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S =]-4, -\frac{1}{2}]}}$$

FILA C

1) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} + 1 & \text{se } x \leq -1 \\ |x-1| - 1 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$



ii) Se $k < -1$ Sono soluzioni dell'eq. $f(x) = k$;

$k = -1$ $\exists$ una soluz. " ;

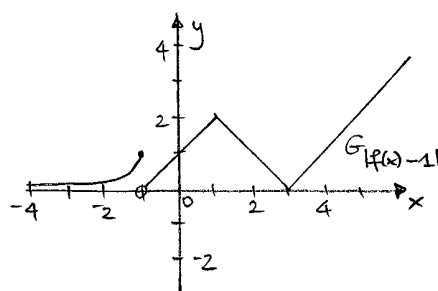
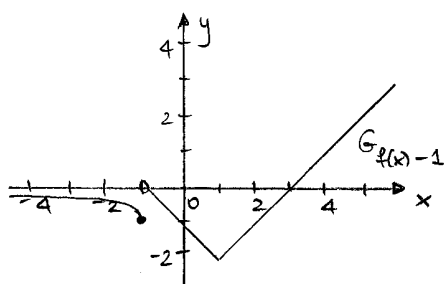
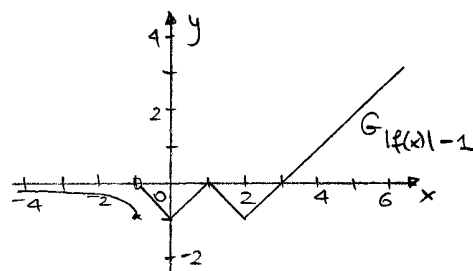
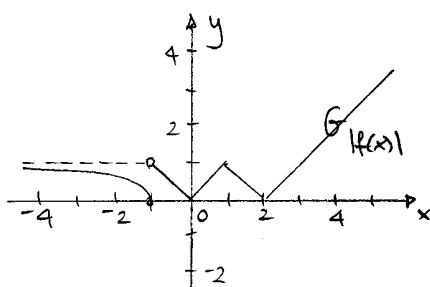
$-1 < k < 0$ Sono 2 soluzioni " ;

$0 \leq k < 1$ Sono 3 soluzioni " ;

$k \geq 1$ Una sola " .

iii) f è ristretta all'intervallo $]-\infty, -1]$ è decrescente, e risulta decrescente anche se ristretta all'intervallo $]-1, 1]$; f ristretta all'intervallo $[1, +\infty[$ risulta crescente.

iv)



2) i) f è limitata, poiché $-1 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [-1, 4]$;

g è limitata inferiormente, poiché $-1 \leq g(x) \quad \forall x \in [-1, 4]$, ma non è limitata superiormente.

ii) $\min_{[-1, 4]} f = -1 \quad \underline{x=2}$ pt. di minimo

$\max_{[-1, 4]} f = 1 \quad \underline{x=0, x=4}$ pt. di massimo.

f non soddisfa le ipotesi del teor. di Weierstrass, poiché f non è continua in $x=2$. □

$$\text{ii)} (f+g)(0) = f(0) + g(0) = 1+1 = \underline{2};$$

$$(fg)(2) = f(2) \cdot g(2) = (-1) \cdot (-1) = \underline{1};$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) = \cancel{\neq} \text{ poiché } g(3)=0 \quad ; \quad \left(\frac{g}{f}\right)(3) = \frac{0}{f(3)} = \underline{0}. \quad \blacksquare$$

$$3) |x(x-3)| \leq 4 \quad \Leftrightarrow -4 \leq x^2 - 3x \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in [-1, 4] \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S = [-1, 4]}}$$

$$2|x-3| + 1 > 5 \quad \Leftrightarrow 2|x-3| > 4 \quad \Leftrightarrow |x-3| > 2$$

$$\Leftrightarrow (x-3 < -2) \circ (x-3 > 2)$$

$$\Leftrightarrow (x < 1) \circ (x > 5) \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[}}$$

$$x - 2x|x| \geq -1 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2x^2 \geq -1 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x + 2x^2 \geq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - x - 1 \leq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 + x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, 1]}}$$

$$x^2 + 2|x-3| = -3 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0 \\ x^2 + 2(x-3) = -3 \end{cases} \circ \begin{cases} x-3 < 0 \\ x^2 - 2(x-3) = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 2x + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \end{cases}$$

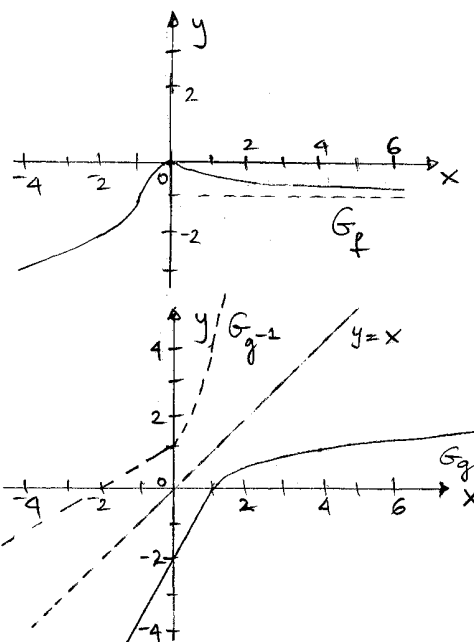
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x = \begin{matrix} -3 \\ 1 \end{matrix} \end{cases} \circ \begin{cases} x < 3 \\ \cancel{\text{nessuna}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S = \emptyset}} \quad \blacksquare$$

4) i) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{se } x \leq 1 \\ \log_4 x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



ii) f non è iniettiva, poiché ogni retta di eq. $y = k$ con $-1 < k < 0$, interseca il grafico di f in due punti, cioè esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ e t.c. $f(x_1) = f(x_2) = k$. □

Abbiamo che $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 0] \subsetneq \mathbb{R}$, e quindi f non è suriettiva. □

iii) vedi disegno sopra. □

iv) $f(]1, +\infty[) =]-1, -\frac{2}{3}[$; $g(]1, +\infty[) =]0, +\infty[$. □

v) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_4 x} - 1$.
 > 0 per $x > 1$ ■

5) i) $e^{|x-4|} \geq e \iff |x-4| \geq 1 \iff (x-4 \leq -1) \vee (x-4 \geq 1)$
 $\Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, 3] \cup [5, +\infty[}}$

$2^{x+x^2-1-4x} \leq 2^3 \iff x^2-3x-4 \leq 0 \iff \underline{\underline{S = [-1, 4]}}$.
 $\uparrow$
 2^x

$3^{-x} \cdot 3^{-x^2} > 3^{-4x} \iff 3^{-x^2-x} > 3^{-4x} \iff x^2+x < 4x$
 $\iff x^2-3x < 0 \iff \underline{\underline{S =]0, 3[}}$. □

$$\text{ii) } x^2(-1) - x(-3) + 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S =]-1, 4[}}$$

$$\log_4 |x-3| < \log_4 \left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| > 0 \\ |x-3| < \frac{1}{4} \end{cases} \quad (\log_4 x \text{ è crescente!})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ 3 - \frac{1}{4} < x < 3 + \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]3 - \frac{1}{4}, 3 + \frac{1}{4}[\setminus \{3\}}}$$

$$\log(2-x) + \log_{1/e}(x+4) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \\ x+4 > 0 \\ 2-x \geq x+4 \end{cases}$$

$$\left(\log_{1/e} x = \frac{\log x}{\log \frac{1}{e}} = -\log x \right)$$

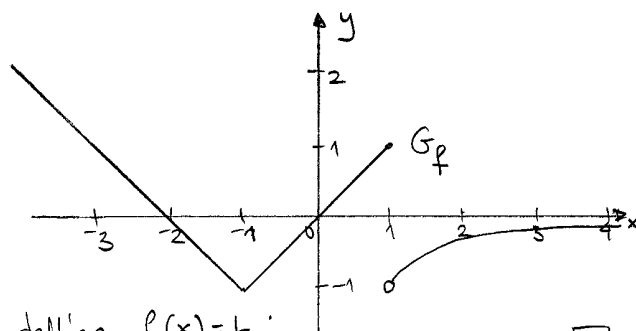
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -4 \\ 2x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]-4, -1]}}$$



FILA (D)

1) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |x+1| - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



ii) Se $k < -1$ ~~Non~~ sono soluzioni dell'eq. $f(x) = k$;

$k = -1$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$;

$-1 < k < 0$ Sono 3 soluzioni " ;

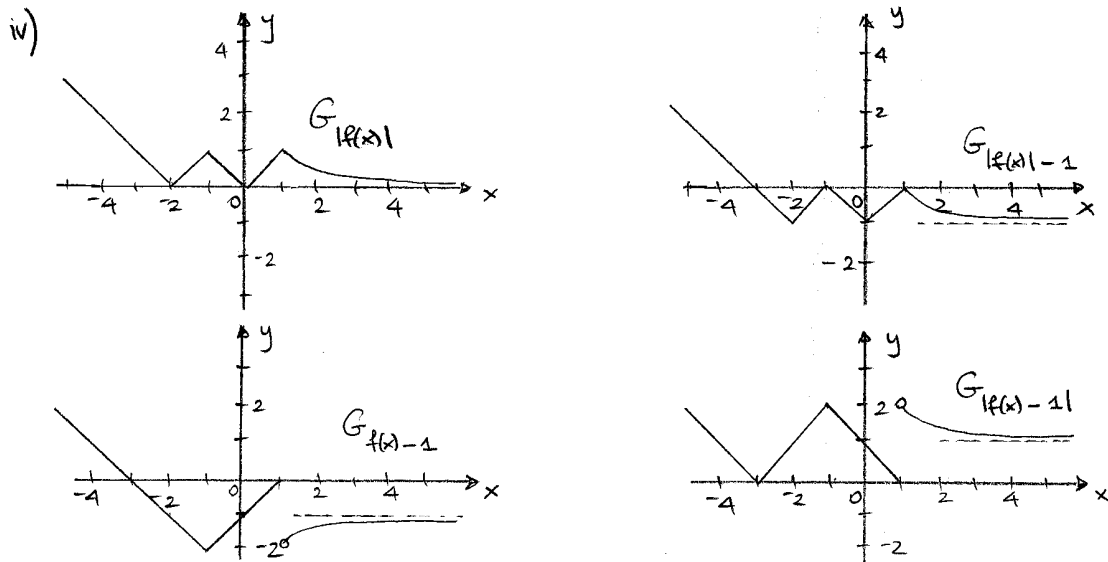
$0 \leq k \leq 1$ Sono 2 soluzioni " ;

$k > 1$ $\exists$ una soluzione " .



iii) f ristretta all'intervallo $]-\infty, -1]$ è decrescente; f risulta crescente se ristretta all'intervallo $[-1, 1]$ oppure all'intervallo $]1, +\infty[$.





$$2) 1+|x-3| > 4 \Leftrightarrow |x-3| > 3 \Leftrightarrow (x-3 < -3) \circ (x-3 > 3)$$

$$\Leftrightarrow (x < 0) \circ (x > 6) \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[.}}$$

$$|4x^2 - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < 4x^2 - 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < 4x^2 < 4$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x^2 < 1 \Rightarrow \underline{\underline{S =]-1, 1[.}}$$

sempre

$$x - x|x| \geq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - x^2 \geq -2 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x + x^2 \geq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x - 2 \leq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, 2]}}$$

$$x^2 + 3|x+1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x+1 < 0 \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} < -2 \end{cases} \circ \begin{cases} x < -1 \\ x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} < -4 \end{cases}$$

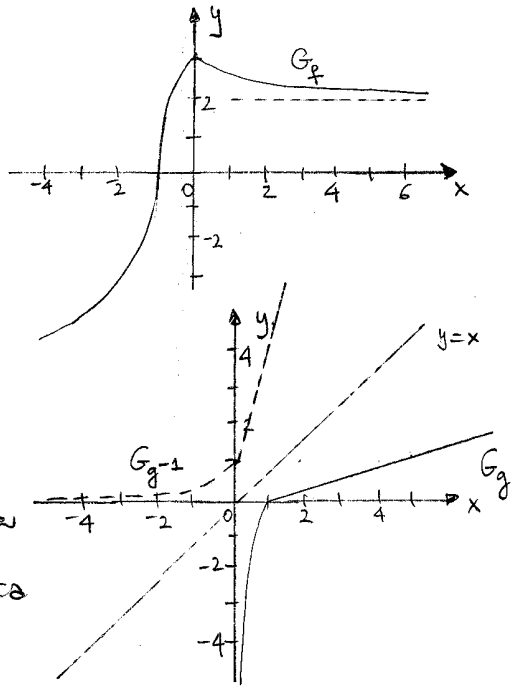
$$\Rightarrow \underline{\underline{S = \{-1\}}}$$

3) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x+1} & \text{se } x \leq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} \log_2 x & \text{for } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} & \text{for } x > 1. \end{cases}$$



ii) f non è iniettiva, poiché ogni retta di eq. $y=k$, con $2 < k < 3$, interseca il grafico di f in due punti, cioè

esistono $x_1, x_2 \in [-1, +\infty[$ con $x_1 \neq x_2$ e t.c. $f(x_1) = f(x_2) = k$.

Abbiamo $f(\mathbb{R}) =]-\infty, 3] \subsetneq \mathbb{R}$ e quindi f non è suriettiva.

iii) Vedi disegno sopra.

$$\text{iv) } f(J_{1,+\infty}[) = J_{2,\frac{5}{2}}[$$

$$g(\bigcup_{1,+\infty}[) = \bigcup_{0,+\infty}[$$

$$\begin{aligned} \text{v) } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 \right] - \frac{1}{4} = \\ &\quad \text{for } x > 2 \text{ se } x > 1 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

4) i) f è limitata, poiché $-1 \leq f(x) \leq 2 \quad \forall x \in [-2, 3]$;

g è limitata inferiormente, poiché $0 \leq g(x) \quad \forall x \in [-2, 3]$, ma non è limitata superiormente. $\square$

ii) $\min_{[-2,3]} f = \underline{\underline{-1}} \quad \underline{\underline{x=-1, x=3}} \text{ pt. di minimo}$

$$\max_{[-2,3]} f = \underline{\underline{2}} \quad \underline{\underline{x \in [0,1]}} \text{ pt. di massimo.}$$

f non soddisfa le ipotesi del teo. di Weierstrass, poiché f non è continua in $x=0$.

iii) $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 2 + 0 = \underline{\underline{2}}$; $(fg)(3) = f(3) \cdot g(3) = (-1) \cdot 2 = \underline{\underline{-2}}$;

$$\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \text{impossibile perché } g(0) = 0! \quad \left(\frac{g}{f}\right)(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$$

$$5) i) 2^{-x+x^2} - 2^{-3x} \leq 0 \Leftrightarrow 2^{-x+x^2} \leq 2^{-3x} \Leftrightarrow -x+x^2 \leq -3x \quad 2^x \uparrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \leq 0 \Rightarrow \underline{S = [-2, 0]}.$$

$$e^{x+x^2+1-2x} > e^3 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow \underline{S =]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[}.$$

$$3^{-|x-3|} < 3^{-2} \Leftrightarrow -|x-3| < -2 \Leftrightarrow |x-3| > 2 \Leftrightarrow$$

$$(x-3 < -2) \cup (x-3 > 2) \Rightarrow$$

$$\underline{S =]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[}.$$

□

$$ii) \log_{1/3} |x-5| > 2 \Leftrightarrow \log_{1/3} |x-5| > \log_{1/3} \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-5| > 0 \\ |x-5| < \frac{1}{9} \end{cases} \quad (\log_{1/3} x \text{ e decrescente!})$$

$$\Leftrightarrow x \neq 5 \quad -\frac{1}{9} < x-5 < \frac{1}{9} \Rightarrow \underline{S =]5-\frac{1}{9}, 5+\frac{1}{9}[\setminus \{5\}}.$$

$$x^2(-1) - x(-2) + 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow \underline{S =]1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}[}.$$

$$\log_3(3-x) + \log_{1/3}(x+4) \leq 0 \Leftrightarrow \log_3(3-x) - \log_3(x+4) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3-x) \leq \log_3(x+4)$$

$$(\log_{1/3} x = \frac{\log_3 x}{\log_3 1/3} = -\log_3 x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x > 0 \\ x+4 > 0 \\ 3-x \leq x+4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -4 \\ 2x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -4 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S = [-\frac{1}{2}, 3[}.$$

■