

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive  
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva  
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione  
 ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

aa. 2009/10 - TERZA PROVA INTERMEDIA - Rovereto, 18 dicembre 2009

FILA (A)

$$1) \bullet \log_2(1-|x-2|) - \log_2(x^2+1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2(1-|x-2|) - \log_2(x^2+1) \leq \log_2 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-|x-2| > 0 & (\text{ovvero che } x^2+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}) \\ \log_2\left(\frac{1-|x-2|}{x^2+1}\right) \leq \log_2 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-|x-2| > 0 \\ \frac{1-|x-2|}{x^2+1} \leq 2 \end{cases} \quad (\log_2 \uparrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x-2| < 1 \\ 1-|x-2| \leq 2(x^2+1) \end{cases} \quad (\text{nota: } x^2+1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}!!)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x-2 < 1 \\ 0 \leq 2x^2 + |x-2| + 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ 0 \leq 2x^2 + |x-2| + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x \geq 2 \\ 0 \leq 2x^2 + x - 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x < 2 \\ 0 \leq 2x^2 - x + 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x < 3 \\ x \leq -1 \text{ o } x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} 1 < x < 2 \\ \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = [2, 3[ \cup ]1, 2[ = \underline{\underline{]1, 3[}}.$$

□

$$\bullet \frac{e^{x^2-|x+1|} e^2}{e^{x+1}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{x^2-|x+1|+2-x-1} > e^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - |x+1| - x + 1 > 0 \quad (e^x \uparrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - (x+1) - x + 1 > 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -1 \\ x^2 + (x+1) - x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < -1 \\ x^2 + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad x > 2 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x < -1 \\ \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = ]-\infty, 0[ \cup ]2, +\infty[.$$

$$2) i) \sum_{k=1}^5 \left( \frac{k^2-1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^5 \frac{(k+1)(k-1)}{k+1} = \sum_{k=1}^5 (k-1) = 1+2+3+4 = \underline{10}.$$

$$\sum_{n=1}^7 \int_n^{n+\frac{1}{2}} 3 dx = \sum_{n=1}^7 3 \left( n+\frac{1}{2} - n \right) = \frac{3}{2} \cdot 7 = \underline{\frac{21}{2}}.$$

$$ii) -\frac{4}{3} + \frac{8}{7} - \frac{16}{15} + \dots - \frac{256}{255} = \sum_{n=2}^8 (-1)^{n+1} \frac{2^n}{2^n - 1}.$$

$$iii) \int_{-2}^{-1} \frac{x^4 - x^3 + 1}{x} dx = \int_{-2}^{-1} \left( x^3 - x^2 + \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \log|x| \right]_{-2}^{-1} =$$

$$= \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{16}{4} + \frac{8}{3} + \log 2 \right) = -\frac{15}{4} - \frac{7}{3} - \log 2 = \underline{-\frac{73}{12} - \log 2}.$$

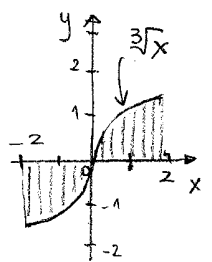
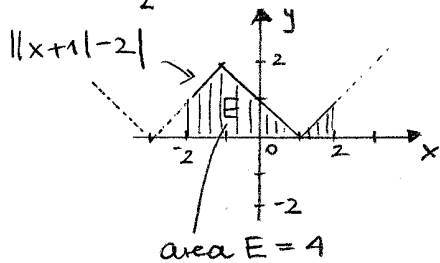
$$\int_0^1 \left( 2e^{2x} + \frac{2^x}{2^x + 2} \right) dx = \left[ e^{2x} + \frac{\log|2^x + 2|}{\log 2} \right]_0^1 = \left( e^2 + \frac{\log 4}{\log 2} \right) - \left( 1 + \frac{\log 3}{\log 2} \right) =$$

$$= e^2 - 1 + \frac{\log 4 - \log 3}{\log 2} = \underline{e^2 - 1 + \frac{\log \frac{4}{3}}{\log 2}}.$$

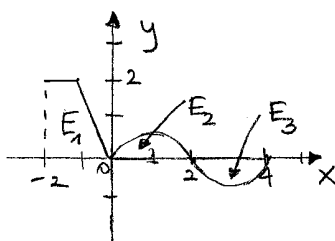
$$\int_{-2}^2 (||x+1|-2| + \sqrt[3]{x}) dx = \int_{-2}^2 ||x+1|-2| dx + \int_{-2}^2 \sqrt[3]{x} dx =$$

$$= 4 + \int_{-2}^2 \sqrt[3]{x} dx = 4 + \left[ \frac{x^{4/3}}{4/3} \right]_{-2}^2 =$$

$$= 4 + \frac{3}{4} (2^{3/3} - (-2)^{3/3}) = \underline{4}.$$



3)



$$i) \int_{-2}^4 f(x) dx = \text{area } E_1 + \text{area } E_2 - \text{area } E_3.$$

Poiché  $\text{area } E_2 = \text{area } E_3$  si ha

$$\int_{-2}^4 f(x) dx = \text{area } E_1 = \underline{3}.$$

ii)  segno di  $f'$  □

iii) Abbiamo  $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ . Abbiamo  $F(-2) = 0$ ,  $F(0) = \int_{-2}^0 f(t) dt = 3$ .

Inoltre  $F$  è crescente su  $[-2, 2]$  e decrescente su  $[2, 4]$ .

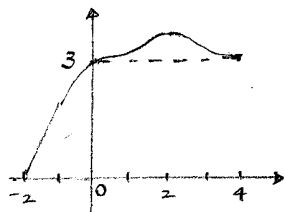


grafico qualitativo di  $F$

$\min F = 0$   $x = -2$  pt. di minimo  $[-2, 4]$

3 min. loc. per  $F$  e  $x = 4$  pt. di min. loc.

$\max F = F(2)$   $x = 2$  pt. di massimo  $[-2, 4]$  □

iv)  $[a, b] = [-2, 2]$  è il più grande intervallo in  $[-2, 4]$ , in cui  $F$  risulta iniettiva. ■

4) 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{se } x < -1 \\ |(x-1)^3 + 1| & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2^{-x+1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{-x+1} = 1$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x+1} = 0$ . □

ii) In  $x = -1$  abbiamo  $f(-1) = 7$  e  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ .

Ne segue che  $x = -1$  pt. di discontinuità. Poiché  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$

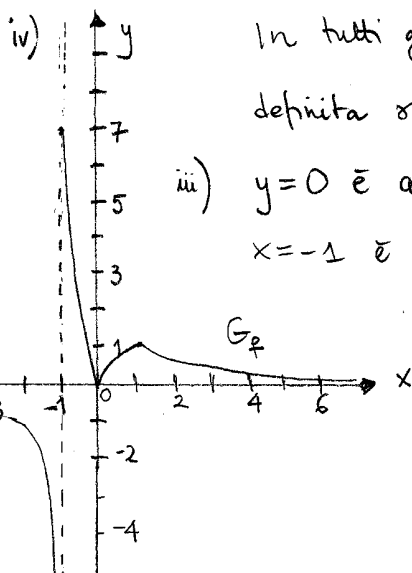
$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = f(1)$ , si ha che  $x = 1$  non è un pt. di discontinuità.

In tutti gli altri  $x$  abbiamo che  $f$  è continua, poiché è definita su ogni tratto da funzioni continue. □

iii)  $y = 0$  è asint. orizzontale per  $f$ , per  $x \rightarrow -\infty$  (e per  $x \rightarrow +\infty$ ).

$x = -1$  è asint. verticale per  $f$ . □

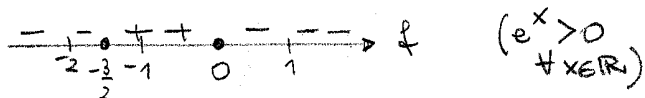
v) Poiché  $0 \leq f(x) \leq 1$  su  $[0, 1]$  si ha  
 $\int_0^1 f(x) dx \leq 1$ . ■



$$5) f(x) = \frac{-3x - 2x^2}{e^x} = \frac{-2x^2 - 3x}{e^x}$$

i) •  $\text{dom } f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$

• segno di  $f$



•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

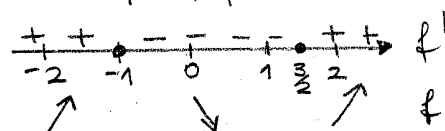
$y=0$  asint. orizzont. per  $f$ , per  $x \rightarrow +\infty$ .

•  $f$  è continua su tutto  $\mathbb{R}$ ;

•  $\text{dom } f' = \mathbb{R}$   $f'(x) = \frac{(-4x-3)e^x - (-2x^2-3x)e^x}{e^{2x}} = \frac{2x^2-x-3}{e^x}$

$2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x_{\frac{1}{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -1 \end{cases}$  pt. critici per  $f$

( $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ )



$x=-1$  pt. di max. loc. stretto

$f(-1) = e$   $f(\frac{3}{2}) = \frac{-9/2 - 9/2}{e^{3/2}} = \frac{-9}{e^{3/2}} \sim -2$

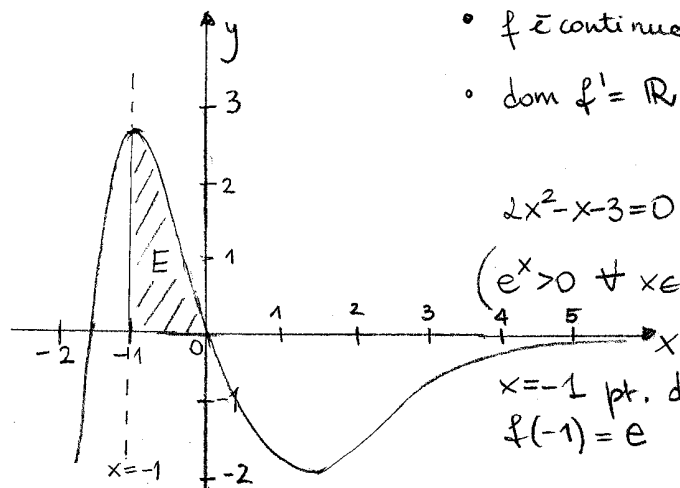


grafico qualitativo di  $f$ .

□

ii) Poiché  $f'(0) = -3$  mi ha voluto che  $y = -3x$  è l'eq. della retta tang. ricercata. □

iii)  $F(x) = e^{-x}(2x^2 + 7x + 7)$  è una funzione derivabile essendo somma e prodotto di funzioni derivabili. Inoltre  $F'(x) = -e^{-x}(2x^2 + 7x + 7) + e^{-x}(4x + 7) = e^{-x}(-2x^2 - 3x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . □

iv)  $\text{area}(E) = \int_{-1}^0 f(x) dx = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Teor.} \\ \text{Fonnicelli}}}{F(0) - F(-1)} = 7 - e(2 - 7 + 7) = \underline{7 - 2e}$ . ■

6)  $P_5^2 = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{60}$ . ■

# FILA (B)

$$1) i) \sum_{k=2}^8 \left( \frac{k+1}{k^2-1} \right) = \sum_{k=2}^8 \left( \frac{\cancel{k+1}}{(k-1)\cancel{(k+1)}} \right) = \sum_{k=2}^8 \frac{1}{k-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{7}.$$

$$\sum_{n=1}^8 \int_{n-\frac{1}{2}}^n 4 dx = \sum_{n=1}^8 4 \left( n - n + \frac{1}{2} \right) = \frac{4}{2} \cdot 8 = 16.$$

□

$$ii) \frac{4}{3} - \frac{8}{7} + \frac{16}{15} - \dots + \frac{256}{255} = \sum_{n=2}^8 (-1)^n \frac{2^n}{2^n-1}.$$

□

$$iii) \int_0^1 \left( e^{-x} + \frac{3^x}{3^x+1} \right) dx = \left[ e^{-x} + \frac{\log |3^x+1|}{\log 3} \right]_0^1 = \left( e^{-1} + \frac{\log 4}{\log 3} \right) - \left( 1 + \frac{\log 2}{\log 3} \right)$$

$$= \frac{1}{e} - 1 + \frac{\log 4 - \log 2}{\log 3} = \frac{1}{e} - 1 + \frac{\log 2}{\log 3}.$$

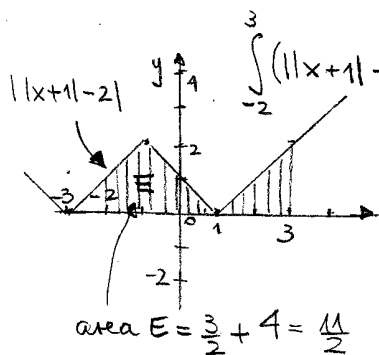
$$\int_{-3}^{-1} \frac{x^5 - x^3 - 1}{x} dx = \int_{-3}^{-1} \left( x^4 - x^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - \log |x| \right]_{-3}^{-1}$$

$$= \left[ \left( -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{243}{5} + 9 - \log 3 \right) \right] = \frac{242}{5} - \frac{26}{3} + \log 3 =$$

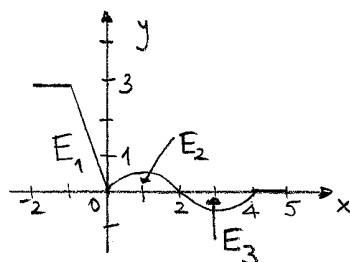
$$= \frac{596}{15} + \log 3.$$

$$\int_{-2}^3 (|x+1|-2+\sqrt[3]{x}) dx = \frac{11}{2} + \int_{-2}^3 \sqrt[3]{x} dx = \frac{11}{2} + \left[ \frac{x^{4/3}}{4/3} \right]_{-2}^3 = \frac{11}{2} + \frac{3}{4} (3\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{2}).$$

■



2) i)



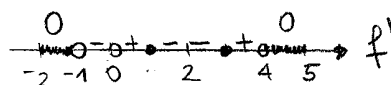
$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \text{area } E_1 + \text{area } E_2 - \text{area } E_3.$$

Poichè area  $E_2 = \text{area } E_3$  mi ha

$$\int_{-2}^3 f(x) dx = \text{area } E_1 = \frac{9}{2}.$$

□

ii)



□

iii)

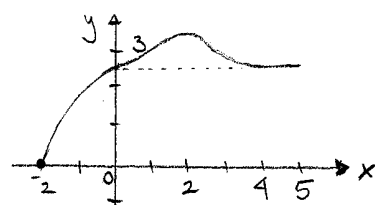


grafico qualitativo di F

Abbiamo  $F(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ , con  $F(-2) = 0$ ,  $F(0) = \int_{-2}^0 f(t) dt = 9/2$ .  
Inoltre  $F$  è crescente in  $[-2, 2]$  e decrescente in  $[2, 4]$  e costante in  $[4, 5]$ . Si ha

$$\min_{[-2, 5]} F = 0 \quad x = -2 \text{ pt. di minimo}$$

$9/2$  è min. loc. per  $F$  e  $x \in [4, 5]$  solo pt. di min. loc.

$$\max_{[-2, 5]} F = F(2) \quad x = 2 \text{ pt. di massimo.} \quad \square$$

ii)  $[a, b] = [-2, 2]$  è il più grande intervallo in  $[-2, 5]$ , in cui  $F$  risulta iniettiva. ■

3)  $\bullet \log_2(1 - |x - 2|) - 1 \leq \log_2(x^2 + 1) \Leftrightarrow \log_2(1 - |x - 2|) - \log_2(x^2 + 1) \leq 1$   
(vedi per la risoluzione FILA (A); Es. 1)  $S = ]1, 3[$ . □

$$\bullet \frac{e^{x^2 - |x + 2|} e^{-2}}{e^{x - 1}} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2 - |x + 2| - 2 - x + 1} > e^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - |x + 2| - x - 1 > 0 \quad (e^x \uparrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - (x + 2) - x - 1 > 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -2 \\ x^2 + (x + 2) - x - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -2 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x < -1 \quad \circ \quad x > 3 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -2 \\ \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S = ]-\infty, -1[ \cup ]3, +\infty[. \quad \blacksquare$$

4) 
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x+1} & \text{se } x < -1 \\ |(x-1)^3 + 1| & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2^{-x+1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x+1}\right) = \underline{\underline{0}};$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(-\frac{1}{x+1}\right) = \underline{\underline{+\infty}};$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2^{-x+1} = \underline{\underline{1}};$$

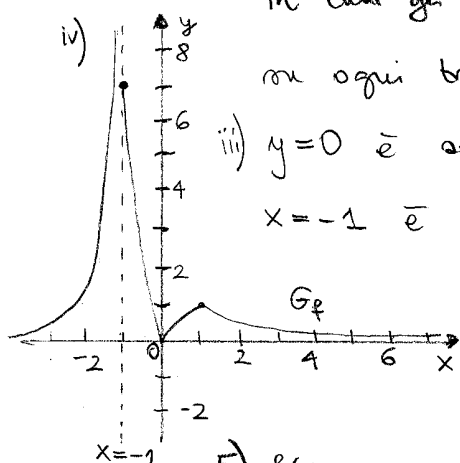
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x+1} = \underline{\underline{0}}.$$

□

ii) In  $x = -1$  abbiamo  $f(-1) = 7$  e  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ . Ne segue che  $x = -1$  è un pr. di discontinuità perf. Poiché  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = f(1)$ , si ha che  $x = 1$  non è un punto di discontinuità.

In tutti gli altri  $x$  abbiamo che  $f$  è continua, poiché è definita su ogni tratto mediante funzioni continue. □

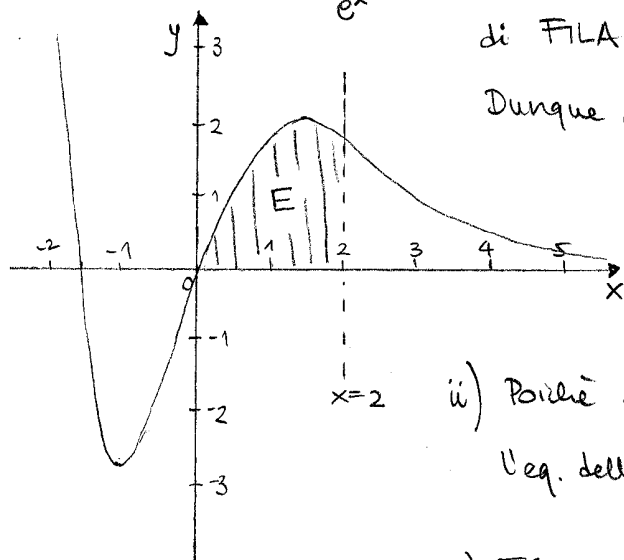
iii)  $y = 0$  è asint. orizzontale per  $f$ , per  $x \rightarrow -\infty$  (e per  $x \rightarrow +\infty$ ).  
 $x = -1$  è asint. verticale per  $f$ . □



v) Poiché  $0 \leq f(x) \leq 1$  su  $[0, 1]$  si ha  $\int_0^1 f(x) dx \leq 1$ . ■

5)  $f(x) = \frac{3x+2x^2}{e^x}$ : i) osserviamo che questa funzione coincide con la funzione di FILA (A), Es. 5, cambiata di segno!

Dunque il suo grafico qualitativo è



$$\text{con } f(-1) = -e$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{e\sqrt{e}} \sim 2. \quad \square$$

ii) Poiché  $f'(0) = 3$  si ha subito che  $y = 3x$  è l'eq. della tang. al grafico di  $f$  in  $(0, 0)$  ricercata. □

iii)  $F(x) = e^{-x}(-2x^2 - 7x - 7)$  è una funzione derivabile essendo somma e prodotto di funzioni

$$\text{derivabili. Inoltre } F'(x) = -e^{-x}(-2x^2 - 7x - 7) + e^{-x}(-4x - 7) = e^{-x}(2x^2 + 3x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{iv) area}(E) = \int_0^2 f(x) dx \stackrel{\text{Teor. Torricelli}}{=} F(2) - F(0) = \frac{1}{e^2}(-8 - 14 - 7) + 7 = 7 - \frac{29}{e^2}. \quad \blacksquare$$

$$6) C_{12,3} = \frac{0}{12!} \stackrel{\text{Teor. Torricelli}}{=} \frac{12!}{3!9!} = \underline{\underline{220}}. \quad \blacksquare$$

FILA C

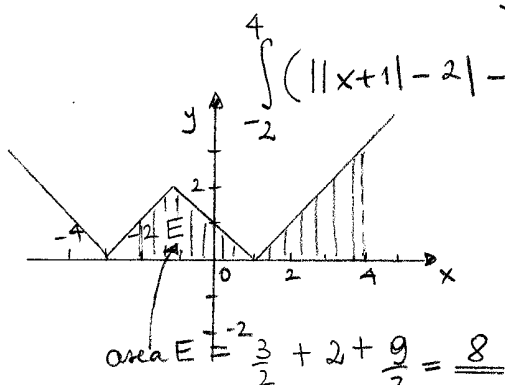
i)  $\sum_{k=2}^8 \left( \frac{k-1}{k^2-1} \right) = \sum_{k=2}^8 \left( \frac{\cancel{k-1}}{(\cancel{k-1})(k+1)} \right) = \sum_{k=2}^8 \frac{1}{k+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9}.$

$\sum_{n=1}^8 \int_{n-\frac{1}{2}}^n 5 dx = \sum_{n=1}^8 5 \left( n - n + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{2} \cdot 8 = 20.$  □

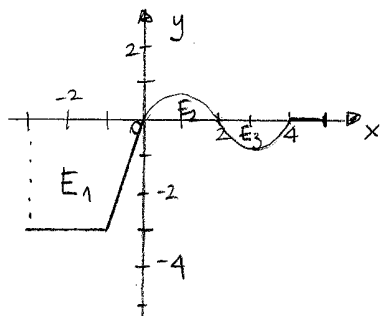
ii)  $-\frac{3}{2} + \frac{9}{8} - \frac{27}{26} + \dots - \frac{243}{242} = \sum_{n=1}^5 (-1)^n \frac{3^n}{3^n - 1}.$  □

iii)  $\int_0^1 \left( -e^{-x} - \frac{2^x}{2^x+1} \right) dx = \left[ e^{-x} - \frac{\log|2^x+1|}{\log 2} \right]_0^1 = \left( e^{-1} - \frac{\log 3}{\log 2} \right) - \left( 1 - \frac{\log 2}{\log 2} \right)$   
 $= \frac{1}{e} - \frac{\log 3}{\log 2}.$

$\int_{-3}^{-1} \frac{x^5 - x^2 + 1}{x} dx = \int_{-3}^{-1} \left( x^4 - x + \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} + \log|x| \right]_{-3}^{-1} =$   
 $= \left( -\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \log 1 \right) - \left( -\frac{243}{5} - \frac{9}{2} + \log 3 \right) =$   
 $= \frac{242}{5} + 4 - \log 3 = \frac{262}{5} - \log 3.$



2)



i)  $\int_{-3}^5 f(x) dx = -\text{area } E_1 + \text{area } E_2 - \text{area } E_3.$

Poiché  $\text{area } E_2 = \text{area } E_3$  si ha

$\int_{-3}^5 f(x) dx = -\text{area } E_1 = -\frac{15}{2}.$  □

ii)  $\frac{0}{-3} \quad \frac{+}{-2} \quad \frac{+}{-1} \quad \frac{-}{0} \quad \frac{-}{1} \quad \frac{+}{2} \quad \frac{+}{3} \quad \frac{0}{4}$  □

iii) Abbiamo  $F(x) = \int_{-3}^x f(t) dt$ , con  $F(-3) = 0$ ,  $F(0) = \int_{-3}^0 f(t) dt = -\frac{15}{2}.$

Inoltre  $F$  è decrescente in  $[-3, 0]$  e crescente in  $[0, 2]$ ; è

decrescente su  $[2, 4]$  e costante su  $[4, 5]$ . Altrimenti

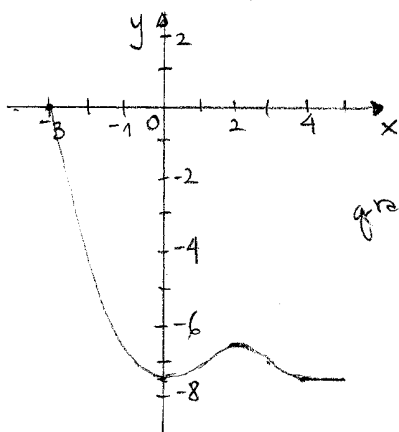


grafico qualitativo di  $F$ .

si deduce

$$\max_{[-3, 5]} F = 0 \quad x = -3 \text{ pt. di massimo.}$$

$$\min_{[-3, 5]} F = -\frac{15}{2} \quad x \in \{0\} \cup [4, 5] \text{ sono pt. di min.}$$

$F(2)$  è massimo loc. per  $F$  e  $x = 2$  pt. di max. loc.

iv)  $[a, b] = [-3, 0]$  è il più grande intervallo in  $[-3, 5]$ , in cui  $F$  risulta iniettiva. □

3) •  $\log_3(2 - |x - 1|) - 1 \leq \log_3(x^2 + 1)$

Questa diseq. si può risolvere esattamente come la diseq. in Es. 1)

FILA (A); ma vedremo anche un'altro procedimento (del tutto analogo)

$$\log_3(2 - |x - 1|) \leq \log_3(x^2 + 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2 - |x - 1|) \leq \log_3(x^2 + 1) + \log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3(2 - |x - 1|) \leq \log_3[3(x^2 + 1)]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - |x - 1| > 0 \\ 2 - |x - 1| \leq 3(x^2 + 1) \end{cases} \quad (x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}!) \quad (\log_3 x \uparrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| < 2 \\ 0 \leq 3x^2 + |x - 1| + 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x - 1 < 2 \\ 0 \leq 3x^2 + |x - 1| + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x \geq 1 \\ 0 \leq 3x^2 + x \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -1 < x < 3 \\ x < 1 \\ 0 \leq 3x^2 - x + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ x \leq -\frac{1}{3} \vee x \geq 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = [1, 3[ \cup ]-1, 1[ = \underline{\underline{]-1, 3[}}.$$

□

$$\bullet \frac{e^{x^2+|x+1|} \cdot e^{-1}}{e^{x+1}} < 1 \Leftrightarrow e^{x^2+|x+1|-1-x-1} < e^0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + |x+1| - x - 2 < 0 \quad (e^x \uparrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -1 \\ x^2 - 2x - 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -1 \\ -1 < x < 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = ]-1, 1[ \cup \emptyset = \underline{\underline{]-1, 1[}}.$$

■

$$4) f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} & \text{se } x < -1 \\ |x-1|^3 + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 3^{-x+1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{(x+1)^2} = \underline{\underline{0}};$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -\frac{1}{(x+1)^2} = \underline{\underline{-\infty}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 3^{-x+1} = \underline{\underline{1}};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-x+1} = \underline{\underline{0}}.$$

□

$$ii) \text{ In } x = -1 \text{ abbiamo } f(-1) = 7 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty.$$

Ne segue che  $x = -1$  è un pt. di discontinuità per  $f$ . Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 = f(1), \quad x = 1 \text{ non è un pt. di discontinuità.}$$

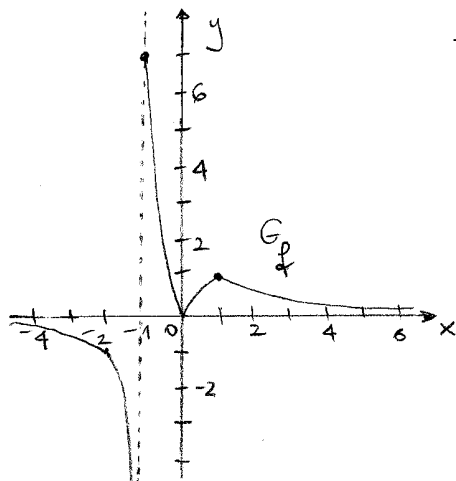
In tutti gli altri  $x$  abbiamo che  $f$  è continua, poiché è definita con ogni tratto da funzioni continue. □

$$iii) y = 0 \text{ è asint. orizzontale per } f, \text{ per } x \rightarrow -\infty \text{ (e per } x \rightarrow +\infty).$$

$$x = -1 \text{ è asint. verticale per } f.$$

□

iv)



v) Poiché  $0 \leq f(x) \leq 1$  in  $[0, 1]$   
 si ha  $\int_0^1 f(x) dx \leq 1$ .

5)  $f(x) = \frac{3x+2x^2}{e^{-x}} = e^x (2x^2+3x)$

i) •  $\text{dom } f = \mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[$

• segno di  $f$   $(e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R})$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$        $y=0$  asint. obliq.  
 per  $f$  per  $x \rightarrow -\infty$ .

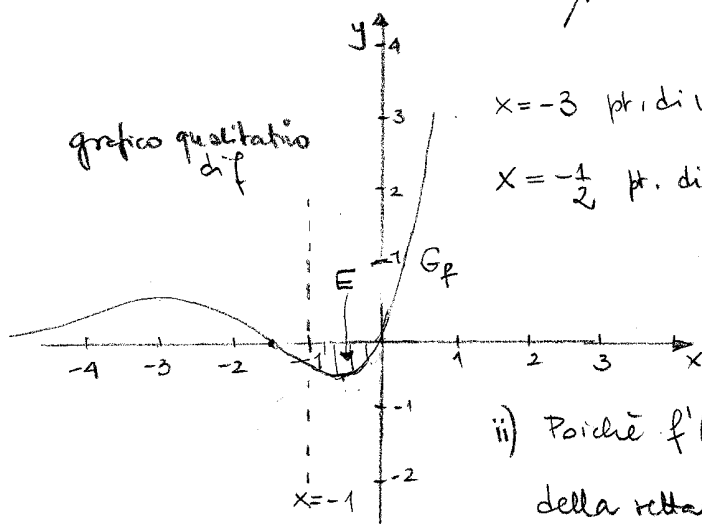
•  $f$  continua su tutto  $\mathbb{R}$ ;

•  $\text{dom } f' = \mathbb{R}$      $f'(x) = e^x(2x^2+3x) + e^x(4x+3)$   
 $= e^x(2x^2+7x+3)$

$2x^2+7x+3=0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{-7 \pm 5}{4}$   
 $(e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R})$        $\begin{matrix} -3 \\ -\frac{1}{2} \end{matrix}$   
 pt. critici per  $f$

$f'$   
 $f$

grafico qualitativo  
 di  $f$



$x = -3$  pt. di max. loc. stretto     $f(-3) = \frac{18-9}{e^3} = \frac{9}{e^3} \sim 0.45$

$x = -\frac{1}{2}$  pt. di min. loc. stretto

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{-1}{\sqrt{e}} \sim -0.6$

ii) Poiché  $f'(0) = 3$  si ha che  $y=3x$  è Veg.  
 della retta tang. al grafico di  $f$  nel pt.  $(0,0)$ .

iii)  $F(x) = e^x(2x^2 - x + 1)$  è una funzione derivabile in tutto  $\mathbb{R}$  essendo somma e prodotto di funzioni derivabili in  $\mathbb{R}$ .

Inoltre  $F'(x) = e^x(2x^2 - x + 1) + e^x(4x - 1) = e^x(2x^2 + 3x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . □

iv)  $\text{area}(E) = - \int_{-1}^0 f(x) dx = - (F(0) - F(-1)) =$   
 $\xrightarrow{\text{Teor. di Torricelli}} - (1 - e^{-1}(2 + 1 + 1)) = - (1 - \frac{4}{e}) = \underline{\underline{\frac{4}{e} - 1}}.$

6)  $C_{10,4} = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6}!}{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{6}!} = \underline{\underline{210}}.$

### FILA ①

1)  $\bullet \log_2(2 - |x - 1|) - \log_2(x^2 + 1) \leq 1$

Possiamo scrivere  $\log_2(2 - |x - 1|) \leq \log_2 2 + \log_2(x^2 + 1)$

e mi ha  $\log_2(2 - |x - 1|) \leq \log_2[2(x^2 + 1)]$

(oss. che  $2 > 0$  e  $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  e quindi possiamo applicare subito la proprietà del logaritmo).

Abbiamo allora che la diseq. si riduce al sistema

$$\begin{cases} 2 - |x - 1| > 0 \\ 2 - |x - 1| \leq 2(x^2 + 1) \end{cases} \quad (\log_2 x \uparrow)$$

e quindi  $\begin{cases} |x - 1| < 2 \\ 0 \leq 2x^2 + |x - 1|. \end{cases}$

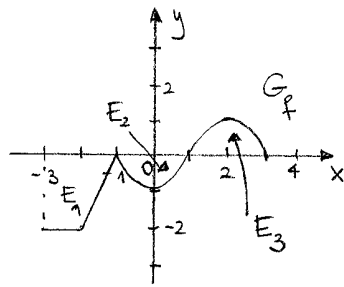
Oss. che la seconda diseq. è sempre vera, e quindi mi ha subito  $\underline{\underline{S = ]-1, 3[}}.$  □

$\bullet \frac{e^{x^2 + |x + 1|} e^{-1}}{e^{x+1}} < 1$

vedi FILA ③, Es. 3) , si ha immediatamente

$\underline{\underline{S = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[}}.$  ■

2)

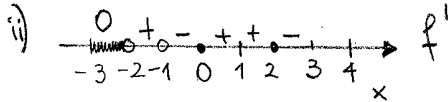


$$i) \int_{-3}^3 f(x) dx = -\text{area } E_1 - \text{area } E_2 + \text{area } E_3.$$

Perché  $\text{area } E_2 = \text{area } E_3$  si ha

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = -\text{area } E_1 = \underline{\underline{-3.}}$$

□



□

iii) Abbiamo  $F(x) = \int_{-3}^x f(t) dt$  per  $x \in [-3, 3]$ , con  $F(-3) = 0$ ,  
 $F(-1) = \int_{-3}^{-1} f(t) dt = -3$ . Inoltre  $F$  è decrescente su  $[-3, 1]$  e crescente  
 su  $[1, 3]$ . Abbiamo

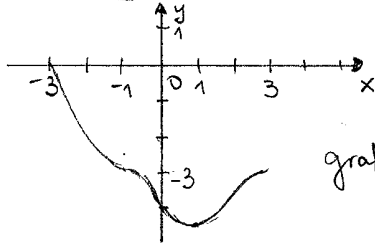


grafico qualitativo di  $F$

$\max F = 0$   $x = -3$  pt. di max  
 $[3, 3]$

$-3$  max. loc. stretto per  $F$  e  $x = 3$  pt. di max loc.

$\min F = F(2)$   $x = 2$  pt. di min.  
 $[-3, 3]$

□

iv)  $[a, b] = [-3, 1]$  è il più grande intervallo in  $[-3, 3]$ , in cui  $F$   
 risulta iniettiva.

■

$$3) i) \sum_{k=2}^7 \left( \frac{k^2 - 1}{k - 1} \right) = \sum_{k=2}^7 \frac{(k-1)(k+1)}{k-1} = \sum_{k=2}^7 (k+1) = 3 + 4 + 5 + \dots + 8 = \underline{\underline{33}}.$$

$$\sum_{n=1}^7 \int_n^{n+\frac{1}{3}} 4 dx = \sum_{n=1}^7 4 \left( n + \frac{1}{3} - n \right) = \frac{4}{3} \cdot 7 = \underline{\underline{\frac{28}{3}}}.$$

□

$$ii) \frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{27}{26} - \dots + \frac{243}{242} = \sum_{n=1}^5 (-1)^{n+1} \frac{3^{n+1}}{3^n - 1}.$$

□

$$iii) \int_{-3}^{-1} \frac{x^5 + x^2 - 1}{x} dx = \int_{-3}^{-1} \left( x^4 + x - \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} - \log|x| \right]_{-3}^{-1} =$$

$$= \left( -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \log 1 \right) - \left( -\frac{243}{5} + \frac{9}{2} - \log 3 \right) = \frac{242}{5} - 4 + \log 3 =$$

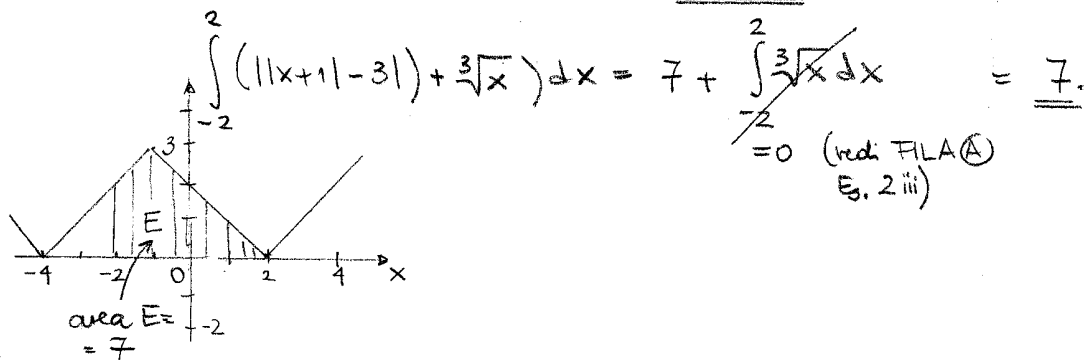
$$= \underline{\underline{\frac{222}{5} + \log 3}}.$$

$$\int_0^1 \left( \frac{4^x}{4^x+2} - 3e^{3x} \right) dx = \left[ \frac{\log|4^x+2|}{\log 4} - e^{3x} \right]_0^1 = \left( \frac{\log 6}{\log 4} - e^3 \right) - \left( \frac{\log 3}{\log 4} - 1 \right)$$

$$= 1 - e^3 + \frac{\log 2}{\log 4} =$$

$$= 1 - e^3 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2} - e^3}}.$$

$(\log 6 - \log 3 = \log \frac{6}{3} = \log 2)$   
 $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2$



4) 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \leq -1 \\ |\log_2(x+1)| & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ |x-2| & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

i)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = \underline{\underline{0}};$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} |\log_2(x+1)| = \underline{\underline{+\infty}};$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} |x-2| = \underline{\underline{1}};$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x-2| = \underline{\underline{+\infty}}.$  □

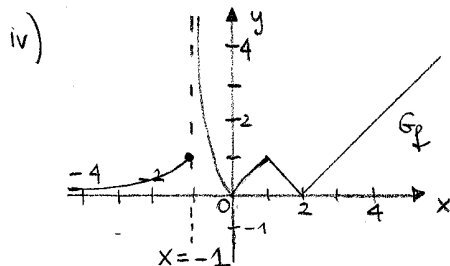
ii)  $x = -1$  è un pt. di discontinuità per  $f$  poiché  $f(-1) = 1$ ,  
mentre  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ ; poiché  $f(1) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ,  
non ha che  $x = 1$  non è un pt. di discontinuità per  $f$ .

Inoltre, in tutti gli altri  $x$  non ha che  $f$  è continua essendo definita su ogni tratto da funzioni continue. □

iii)  $y = 0$  è asint. orizzontale per  $f$  per  $x \rightarrow -\infty$ ;

$x = -1$  è asintoto verticale per  $f$ ;

$y = x-2$  è asintoto obliquo per  $f$  per  $x \rightarrow +\infty$ . □

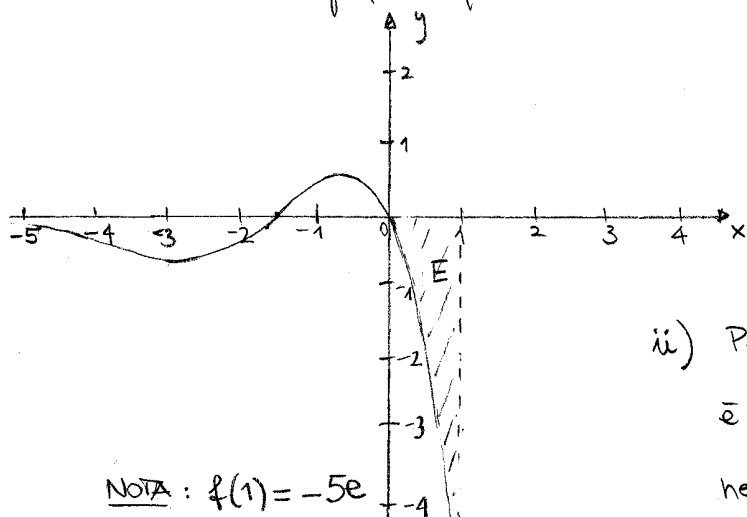


v) Poiché  $0 \leq f(x) \leq 1$  in  $[0, 1]$   
 mi ha  $\int_0^1 f(x) dx \leq 1$ .

5)  $f(x) = \frac{-3x - 2x^2}{e^{-x}} = -e^x(2x^2 + 3x)$

i) Osserviamo che questa funzione coincide con la funzione di FILA (C),  
 Es.5, cambiata di segno!

Il suo grafico qualitativo è dunque con



$$f(-3) = -\frac{9}{e^3} \quad (\sim -0.45)$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (\sim 0.6)$$

ii) Poiché  $f'(0) = -3$  mi ha che  $y = -3x$   
 è l'eq. della retta tg. al grafico di  $f$   
 nel pt.  $(0, 0)$ .

NOTA:  $f(1) = -5e$

iii)  $F(x) = (-2x^2 + x - 1)e^x$  è una funzione derivabile e

$$F'(x) = e^x(-2x^2 + x - 1) + e^x(-4x + 1) = e^x(-2x^2 - 3x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

iv)  $\text{area}(E) = -\int_0^1 f(x) dx = -[F(1) - F(0)] = -[e(-2) - (-1)] = \underline{\underline{2e - 1}}$   
 Teor. Tomcelli

6)  $P_6^{2,2} = \frac{6!}{2!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cancel{2}} = \underline{\underline{180}}$