

COGNOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_  
MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 12 FEBBRAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)|x| < 2\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 4x \leq 0\},$$

e rappresentateli sulla retta reale. Determinate gli insiemi  $A \cup B$  e  $A \setminus B$ .

- ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x > 0 \\ y - 2x^2 + 4x - 2 \geq 0 \\ y < 2. \end{cases}$$

- 2) i) Determinate l'equazione della retta  $r$  passante per i punti  $P = (-3, -1)$  e  $Q = (1, 3)$ .  
ii) Determinate l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per il punto  $Q$ .  
iii) Rappresentate graficamente le rette  $r$  e  $r'$  e la parabola di equazione  $y = x^2 - 2x + 2$ . Determinate l'area della regione piana delimitata dalle rette  $r$  e  $r'$  e dall'arco di parabola contenente il vertice della parabola.

3) i) Sia  $g : [0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $g(x) = \log_2 x$ .

a) Calcolate  $g(\frac{1}{8})$ ,  $g(\frac{1}{4})$ ,  $g(\frac{1}{2})$ ,  $g(1)$ ,  $g(2)$ ,  $g(4)$  e  $g(8)$ .

b) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di  $g$ , indicando in particolare i punti  $(x, g(x))$  con i  $g(x)$  individuati precedentemente.

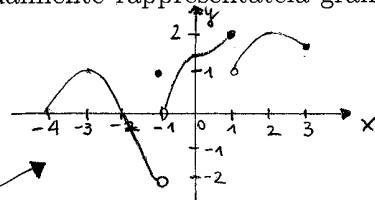
ii) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 2^x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \log_2 x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Rappresentate graficamente  $f$ .

b) Dite se  $f$  ammette funzione inversa  $f^{-1}$ , ed eventualmente rappresentatela graficamente.

c) Calcolate  $\sum_{n=1}^5 \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx$ .



4) Sia  $f : [-4, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione rappresentata in figura.

i) Calcolate  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

ii) Determinate i punti del grafico di  $f$  in cui la retta tangente al grafico risulta essere orizzontale.

iii) Giustificate la validità della seguente diseguaglianza  $2 \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq 4$ .

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{3x^2 - 4x}{x^2 + 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Dite se  $f$  è una funzione limitata (motivare la risposta!!).

iii) Sia  $P$  il punto di intersezione del grafico di  $f$  con la retta  $r$  di equazione  $y = 3$ . Scrivete l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $P$ .

6) Esercizi da svolgere in un batter d'occhio... o quasi!!!!

i) Sia  $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua tale che

$$\min_{x \in [-2, 2]} f(x) = -1, \quad \max_{x \in [-2, 2]} f(x) = 2.$$

Si ha allora sempre che  $\int_{-2}^2 f(x) dx > 0$  ? (motivare la risposta!!)

ii) Quanti sono i modi diversi di scegliere in una biblioteca 3 libri tra un'offerta di 24 libri?

COGNOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_  
MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

B

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 12 FEBBRAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Determinate l'equazione della retta  $r$  passante per i punti  $P = (-3, 1)$  e  $Q = (1, 5)$ .  
ii) Determinate l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per il punto  $Q$ .  
iii) Rappresentate graficamente le rette  $r$  e  $r'$  e la parabola di equazione  $y = x^2 - 2x + 4$ . Determinate l'area della regione piana delimitata dalle rette  $r$  e  $r'$  e dall'arco di parabola contenente il vertice della parabola.

- 2) i) Sia  $g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da  $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ .  
a) Calcolate  $g(\frac{1}{8})$ ,  $g(\frac{1}{4})$ ,  $g(\frac{1}{2})$ ,  $g(1)$ ,  $g(2)$ ,  $g(4)$  e  $g(8)$ .  
b) Rappresentate nel piano cartesiano il grafico di  $g$ , indicando in particolare i punti  $(x, g(x))$  con i  $g(x)$  individuati precedentemente.  
ii) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x^4 & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ -\log_{\frac{1}{2}} x + 2 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- a) Rappresentate graficamente  $f$ .  
b) Dite se  $f$  ammette funzione inversa  $f^{-1}$ , ed eventualmente rappresentatela graficamente.

c) Calcolate  $\sum_{n=1}^5 \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx$ .

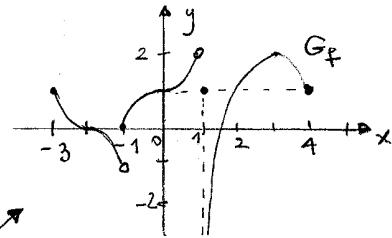
3) i) Determinate gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - 4x > 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)|x| \leq 2\},$$

e rappresentateli sulla retta reale. Determinate gli insiemi  $A \cup B$  e  $A \cap B$ .

ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x > 0 \\ y - 2x^2 + 4x - 2 < 0 \\ y < 2. \end{cases}$$



4) Sia  $f : [-3, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione rappresentata in figura.

i) Calcolate  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ .

ii) Determinate i punti del grafico di  $f$  in cui la retta tangente al grafico risulta essere orizzontale.

iii) Giustificate la validità della seguente diseguaglianza  $2 \leq \int_2^4 f(x) dx \leq 4$ .

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{4x^2 + 3x}{x^2 + 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Dite se  $f$  è una funzione limitata (motivare la risposta!!).

iii) Sia  $P$  il punto di intersezione del grafico di  $f$  con la retta  $r$  di equazione  $y = 4$ . Scrivete l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $P$ .

6) Esercizi da svolgere in un batter d'occhio... o quasi!!!!

i) Sia  $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua tale che

$$\min_{x \in [-3, 2]} f(x) = -2, \quad \max_{x \in [-3, 2]} f(x) = 1.$$

Si ha allora sempre che  $\int_{-3}^2 f(x) dx < 0$  ? (motivare la risposta!!)

ii) Quanti sono i modi diversi di scegliere in una biblioteca 4 libri tra un'offerta di 27 libri?