

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

--	--	--	--	--	--

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 12 LUGLIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) a) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 + 3x)|x + 1| < 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \log(3x) - \log(4 - x^2) \geq 0\}.$$

i) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.

ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$.

iii) Rappresentate graficamente l'insieme $B \times B$.

- b) Siano \mathcal{A} e \mathcal{B} due proposizioni. Scrivete la tabella di verità della proposizione

$$[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee (\neg \mathcal{B})] \Rightarrow (\neg \mathcal{A}).$$

- 2) i) Determinate l'equazione della retta r passante per i punti $P = (-1, 2)$ e $Q = (3, 1)$. Rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Sia V il vertice della parabola di equazione $y + x^2 + 4x + 2 = 0$. Determinate l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per V .

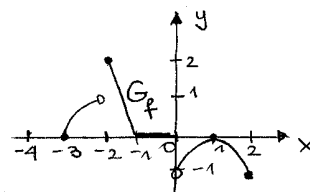
iii) Rappresentate graficamente nello stesso sistema di riferimento la retta r' e la parabola data.

iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dalla retta r' , dalla parabola e dall'asse delle ordinate.

3) Sia $f : [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.

i) Rappresentate, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni

$$x \mapsto f(x+1), \quad x \mapsto -2f(x), \quad x \mapsto |f(x) - 1|.$$



ii) Dite se f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass (motivando la risposta).

iii) Determinate, se esistono, il massimo (risp. minimo) e i punti di massimo (risp. punti di minimo) di f .

iv) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

v) Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x) = -2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Determinate, dove esistono, le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

4) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = e^x + x$.

i) Calcolate $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$.

ii) Verificate che f è una funzione strettamente crescente su \mathbb{R} .

iii) È ben definita sull'intervallo $[-1, 0]$ la funzione $\frac{1}{f(x)}$? Motivate la risposta.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(0, \frac{1}{2})$. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .

iii) Determinate $\int_{-1}^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$.

6) i) Rappresentate nel piano cartesiano una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile e crescente soddisfacente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1, \quad f(-1) = 2, \quad f'(-1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

ii) Calcolate $\sum_{n=2}^5 \frac{n-1}{n^2-1}$.

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 12 LUGLIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) a) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 + 2x)|x + 1| < 0\} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \log(3x) - \log(4 - x^2) \leq 0\}.$$

i) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.

ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$.

iii) Rappresentate graficamente l'insieme $B \times B$.

b) Siano \mathcal{A} e \mathcal{B} due proposizioni. Scrivete la tabella di verità della proposizione

$$[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \vee (\text{non} \mathcal{B})] \Rightarrow (\text{non} \mathcal{A}).$$

2) i) Determinate l'equazione della retta r passante per i punti $P = (1, 2)$ e $Q = (-3, 1)$. Rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

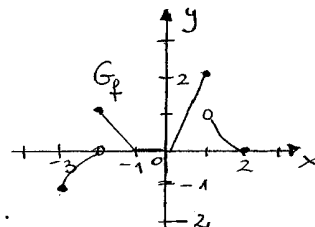
ii) Sia V il vertice della parabola di equazione $y + x^2 - 4x + 2 = 0$. Determinate l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per V .

iii) Rappresentate graficamente nello stesso sistema di riferimento la retta r' e la parabola data.

iv) Determinate l'area della regione piana delimitata dalla retta r' , dalla parabola e dall'asse delle ordinate.

- 3) Sia $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.
i) Rappresentate, nei rispettivi insiemi di definizione, le funzioni

$$x \mapsto f(x-1), \quad x \mapsto -2f(x), \quad x \mapsto |f(x)-2|.$$



- ii) Dite se f soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass (motivando la risposta).
iii) Determinate, se esistono, il massimo (risp. minimo) e i punti di massimo (risp. punti di minimo) di f .
iv) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
v) Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Determinate, dove esistono, le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$.
-

- 4) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = e^x + x^3$.

- i) Calcolate $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)}$.
ii) Verificate che f è una funzione strettamente crescente su \mathbb{R} .
iii) È ben definita sull'intervallo $[-1, 0]$ la funzione $\frac{1}{f(x)}$? Motivate la risposta.
-

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(0, \frac{1}{2})$. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .
iii) Determinate $\int_{-2}^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx$.
-

- 6) i) Rappresentate nel piano cartesiano una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, derivabile e decrescente soddisfacente le seguenti proprietà:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \quad f(-2) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

- ii) Calcolate $\sum_{n=3}^5 \frac{n-2}{4-n^2}$.
-