

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 30 AGOSTO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Scrivete la negazione della seguente proposizione

$$\mathcal{A} = "\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x - 2 = y"$$

portando il **non** il più internamente possibile. Dite quali delle due proposizioni, \mathcal{A} oppure **non** \mathcal{A} è vera (motivare la risposta!).

- ii) Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x + |x - 1| > 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2+x} - 1 \leq 0\}$.

- a) Determinate gli insiemi A e B , e rappresentateli sulla retta reale.
- b) Determinate gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.
- c) Determinate, se esistono, $\min B$ e $\max B$.

- 2) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme dei punti (x, y) soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 4(x+2)^2 + (y-2)^2 > 1 \\ y - x^2 - 4x - 4 \geq 0 \\ y \leq 4. \end{cases}$$

Dite se le seguenti affermazioni sono vere o false (motivare la risposta!):

- i) La retta di equazione $x = 2$ interseca l'insieme dei punti (x, y) individuati precedentemente?
- ii) È la retta di equazione $y = 0$?

- 3) i) Determinate l'equazione della retta r passante per il punto $P = (-4, -1)$ e con pendenza $m = \frac{3}{4}$.
ii) Sia Q il punto di intersezione di r e l'asse delle ordinate. Determinate la distanza d dei punti P e Q .
iii) Scrivete l'equazione della circonferenza \mathcal{C} di centro Q e raggio uguale a d .
iv) Rappresentate graficamente r e la circonferenza \mathcal{C} .
v) Determinate l'equazione di tutte le rette orizzontali che intersecano la circonferenza \mathcal{C} in almeno un punto.
-

- 4) Siano $f, g : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } -4 \leq x \leq -1 \\ -2|x| + 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \log_2 x - 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 4, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} (x+3)^2 - 1 & \text{se } -4 \leq x \leq -2 \\ 0 & \text{se } -2 < x < 2 \\ -(x-3)^2 + 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g .
ii) Determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo di f su $[-4, 4]$. Individuate anche gli eventuali punti di massimo e/o punti di minimo.
iii) Calcolate $\int_{-4}^1 f(x) dx$.
iv) Determinate l'area della regione piana A definita da

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4, 4], 0 \leq y \leq g(x)\}.$$

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^2}{x-5}$$

- e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(0, 0)$. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .
-

- 6) Sia $G : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale della funzione g data in Esercizio 4 e definita da $G(x) = \int_{-4}^x g(t) dt$.
i) Determinate il segno di G .
ii) Determinate gli eventuali intervalli di monotonia di G .
-

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 30 AGOSTO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Sia $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Scrivete la negazione della seguente proposizione

$$\mathcal{A} = "\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x - 2 = y"$$

portando il **non** il più internamente possibile. Dite quali delle due proposizioni, \mathcal{A} oppure **non** \mathcal{A} è vera (motivate la risposta!).

- ii) Siano $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x + |x - 2| > 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : 2^{x^2+3x} - 1 \leq 0\}$.

- a) Determinate gli insiemi A e B , e rappresentateli sulla retta reale.
- b) Determinate gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $A \setminus B$.
- c) Determinate, se esistono, $\min B$ e $\max B$.

- 2) i) Determinate l'equazione della retta r passante per il punto $P = (4, -1)$ e con pendenza $m = -\frac{3}{4}$.

- ii) Sia Q il punto di intersezione di r e l'asse delle ordinate. Determinate la distanza d dei punti P e Q .

- iii) Scrivete l'equazione della circonferenza C di centro Q e raggio uguale a d .

- iv) Rappresentate graficamente r e la circonferenza C .

- v) Determinate l'equazione di tutte le rette verticali che intersecano la circonferenza C in almeno un punto.

- 3) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme dei punti (x, y) soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 4(x-2)^2 + (y-2)^2 > 1 \\ y - x^2 + 4x - 4 \geq 0 \\ y < 4. \end{cases}$$

Dite se le seguenti affermazioni sono vere o false (motivare la risposta!):

- i) La retta di equazione $x = -2$ interseca l'insieme dei punti (x, y) individuati precedentemente?
 - ii) E la retta di equazione $y = 0$?
-

- 4) Siano $f, g : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{se } -4 \leq x \leq -1 \\ 2|x| - 1 & \text{se } -1 < x < 1 \\ -\log_2 x + 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 4, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 1 & \text{se } -4 \leq x \leq -2 \\ 0 & \text{se } -2 < x < 2 \\ (x-3)^2 - 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g .
- ii) Determinate, se esistono, il massimo e/o il minimo di f su $[-4, 4]$. Individuate anche gli eventuali punti di massimo e/o punti di minimo.
- iii) Calcolate $\int_{-4}^1 f(x) dx$.
- iv) Determinate l'area della regione piana A definita da

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4, 4], 0 \leq y \leq g(x)\}.$$

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^2}{3-x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(0, 0)$. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f .
-

- 6) Sia $G : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale della funzione g data in Esercizio 4 e definita da $G(x) = \int_{-4}^x g(t) dt$.

- i) Determinate il segno di G .
 - ii) Determinate gli eventuali intervalli di monotonia di G .
-