

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2009/10 - Esame Scritto - Rovereto, 22 gennaio 2010

FILA (A)

1) i) Poniamo $B = \text{"Oggi supero l'esame di Analisi Matematica (con elementi di Algebra)"} e C = \text{"Da domani mi dedico alla preparazione dell'esame di Psicologia Generale"}.$

Allora la proposizione A si scrive " $B \Rightarrow C$ ", e quindi

$$\underline{\text{non } A} \Leftrightarrow \text{non}(B \Rightarrow C) \Leftrightarrow \underline{B \wedge (\text{non } C)}.$$

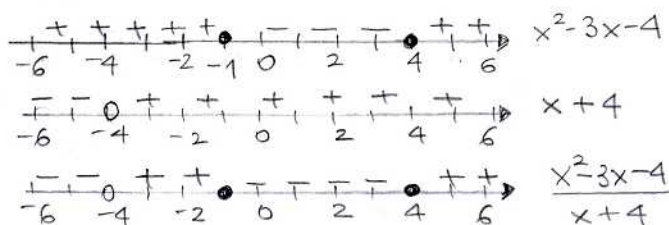
Possiamo scrivere $\text{non } A = \text{"Oggi supero l'esame di Analisi Matematica (con elementi di Algebra) e da domani non mi dedico alla preparazione dell'esame di Psicologia Generale"}$.

□

$$\begin{aligned} \text{ii) a) } A &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - |x| < 0\} & \begin{cases} x \geq 0 & \circ & x < 0 \\ x^2 - x < 0 & & x^2 + x < 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 & \circ & \begin{cases} x < 0 \\ -1 < x < 0 \end{cases} \\ 0 < x < 1 & & \end{cases} & \Rightarrow \underline{A =]-1, 1[\setminus \{0\}} \end{aligned}$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x}{x+4} \geq 1\right\} \quad \frac{x^2 - 2x}{x+4} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - x - 4}{x+4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 4}{x+4} \geq 0$$



$$\underline{B =]-4, -1] \cup [4, +\infty[}.$$



$$A = \text{///}$$



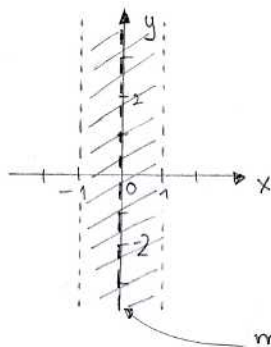
$$B = \text{///}$$

□

b) $\underline{A \cup B =]-4, 1[\cup [4, +\infty[\setminus \{0\}}$ $\underline{A \cap B = \emptyset}$; $\underline{A \setminus B = A}.$

□

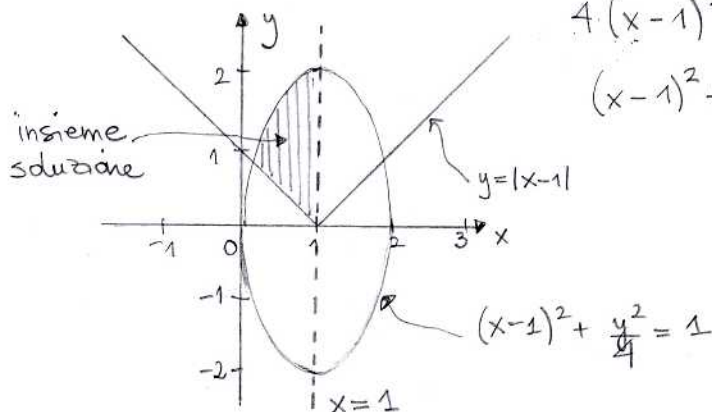
c) $A \times \mathbb{R} = //$



2) i) $4x^2 + y^2 - 8x \leq 0 \Leftrightarrow 4(x^2 - 2x) + y^2 \leq 0$

$4(x-1)^2 - 4 + y^2 \leq 0$

$(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$



ii) $2^{|x+2|} \cdot 2^{-x} - 4 \geq 0$ (vedi 3^a Prova Intermedia 22/01/10 Fila B, Es.3) $S = \mathbb{R}$

3) i) $P_k = (2, 2 + \frac{1}{k})$ $Q = (-3, 0)$: la pendenza della retta r passante per i punti P_k e Q sarà $m = \frac{1}{2}$ se e solo se

$\frac{1}{2} = \frac{2 + \frac{1}{k} - 0}{2 + 3} \Leftrightarrow \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{k} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{k} \Rightarrow \underline{k = 2}$. *

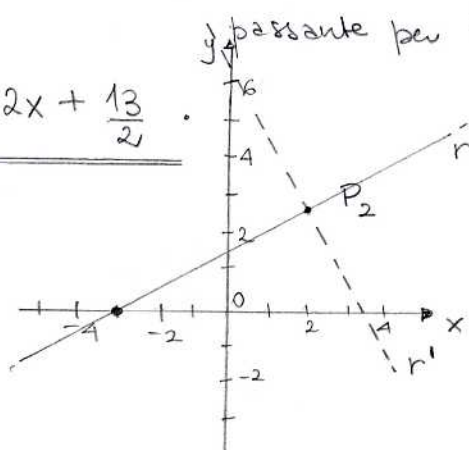
ii) Allora $P_2 = (2, \frac{5}{2})$, e r ha l'eq. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

a) $y = \frac{5}{2} - 2(x-2)$ è l'eq. della retta r' perpendicolare alla retta r e

passante per P_2 . Risultato

$y = -2x + \frac{13}{2}$

b)



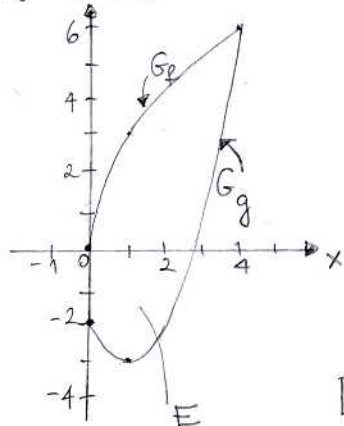
* Si può anche scrivere l'eq. della retta pass. per Q e con pendenza $m = \frac{1}{2}$ e poi imporre che P_k appartenga a tale retta!

4) $f, g: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 3\sqrt{x}$

$g(x) = x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$

i)



ii) $f([0, 4]) = [0, 6]$. □

iii) $[1, 4]$. □

iv) -2 massimo loc, $x=0$ pt. di max loc.

$\min_{[0,4]} g = -3$ minimo loc. (e globale), $x=1$ pt. di min.

$\max_{[0,4]} g = 6$ massimo loc. (e globale), $x=4$ pt. di max. □

v) area $E = \int_0^4 [f(x) - g(x)] dx =$

$$= \int_0^4 [3\sqrt{x} - x^2 + 2x + 2] dx = \left[3 \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x \right]_0^4 =$$

$$= 2 \cdot 4^{3/2} - \frac{64}{3} + 16 + 8 = 40 - \frac{64}{3} = \frac{56}{3}$$

5) $f(x) = \frac{1}{e^x(x-1)}$ (Vedi 3^a Prova Intermedia, FILA(B) Es.5) 22/01/10 □

6) Oss. che $f(x) = 3^x - x^4 - \frac{1}{2}$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$; in particolare su $[-1, 0]$. Inoltre $f(-1) = \frac{1}{3} - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{7}{6}$, $f(0) = \frac{1}{2}$. Per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 \in]-1, 0[$ t.c. $f(x_0) = 0$ (nota: poiché 3^x e $-x^4 - \frac{1}{2}$ sono funzioni strett. crescenti su $[-1, 0]$, f è strett. crescente su $[-1, 0]$ essendo somma di due funzioni strett. crescenti; quindi f si annulla in un solo pt. all'interno di $[-1, 0]$). Quindi $\frac{1}{f(x)}$ non è ben definita su $[-1, 0]$. □

FILA (B)

1) i) Poniamo $B = \text{"Oggi supero l'esame di Analisi Matematica (con elementi di Algebra)"} \text{ e } C = \text{"Domani vado a sciare"}$.

Allora la proposizione A si scrive " $B \Rightarrow C$ ", e quindi

$\text{non } A \Leftrightarrow \text{non } (B \Rightarrow C) \Leftrightarrow B \text{ e } (\text{non } C)$.

Possiamo scrivere $\text{non } A = \text{"Oggi supero l'esame di Analisi Matematica (con elementi di Algebra) e domani non vado a sciare"}$. □

ii) a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2|x| < 0\}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 2x < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ -2 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{A =]-2, 2[\setminus \{0\}}$

$B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x}{x+4} \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 3x - 4}{x+4} \leq 0\}$

(vedi FILA (A)
Es. 1 ii))

$=]-\infty, -4[\cup [-1, 4]$.



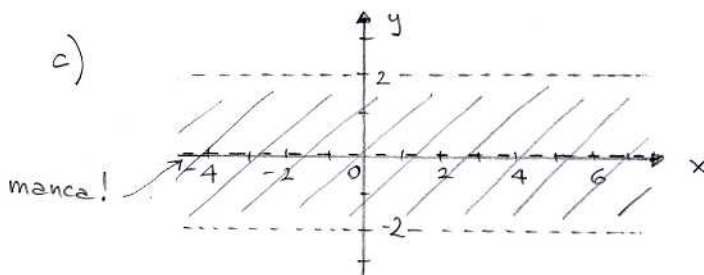
$A = //$



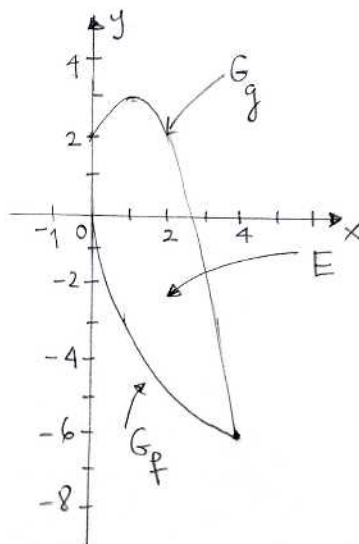
$B = //$

b) $A \cup B =]-\infty, -4[\cup]-2, 4]$;

$A \cap B = [-1, 2[\setminus \{0\}$; $A \setminus B =]-2, -1[$. □



$\mathbb{R} \times A = //$



2) $f, g: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = -3\sqrt{x}$

$g(x) = -x^2 + 2x + 2$

$= -(x^2 - 2x) + 2$

$= -(x-1)^2 + 3$

□

ii) $f([0,4]) = \underline{\underline{[-6, 0]}}$. □

iii) $\underline{\underline{[1, 4]}}$. □

iv) 2 minimo loc. $x=0$ pt. di min loc.

$\max_{[0,4]} g = 3$ massimo loc. (e globale), $x=1$ pt. di mass.

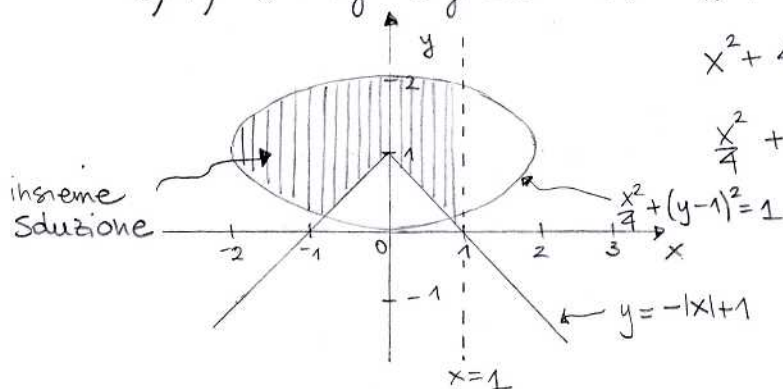
$\min_{[0,4]} g = -6$ minimo loc. (e globale), $x=4$ pt. di minimo. □

v) area $E = \int_0^4 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^4 [-x^2 + 2x + 2 + 3\sqrt{x}] dx = \frac{56}{3}$
 vedi FILA (A), Es. 4 v) ■

3) i) $x^2 + 4y^2 - 8y \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + 4(y^2 - 2y) \leq 0$

$x^2 + 4(y-1)^2 - 4 \leq 0$

$\frac{x^2}{4} + (y-1)^2 \leq 1$



ii) $2^{|x+1|} \cdot 2^{-x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow 2^{|x+1|-x} \geq 2^1 \Leftrightarrow |x+1|-x \geq 1$
 ($2^x \uparrow$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ |x+1|-x \geq 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ -x-1-x \geq 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \mathbb{R} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -1 \\ 2x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S = \mathbb{R}}}$ ■

4) vedi FILA (A) Es. 3) ■

5) i) $f(x) = \frac{2}{e^x(x+2)}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$ poiché $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

• $\frac{-}{-3} \frac{-}{-2} \frac{+}{-1} \frac{+}{0} \frac{+}{1} \frac{+}{2} \rightarrow f(x)$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^{-x}}{x+2} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

$x = -2$ è
 asympt. verticale
 per f .

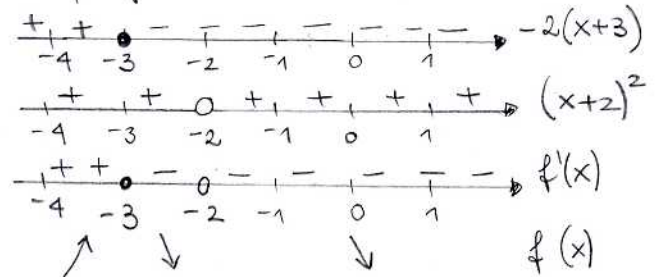
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$y = 0$ è asympt.
 orizz. per f
 per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $f'(x) = \frac{-2[e^x(x+2) + e^x]}{e^{2x}(x+2)^2}$
 $= \frac{-2(x+3)}{e^x(x+2)^2}$

$x = -3$ è pt. critico per f



$x = -3$ pt. di max. loc. (stretto) per f

$f(-3) = \frac{2}{-e^{-3}} = -2e^3 \quad (\sim -40,2)$

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $f''(x) = \frac{-2(e^x(x+2)^2) + 2(x+3)[e^x(x+2)^2 + 2e^x(x+2)]}{e^{2x}(x+2)^3}$
 $= \frac{-2x-4+2x^2+14x+24}{e^x(x+2)^3}$
 $= \frac{2x^2+12x+20}{e^x(x+2)^3} \quad \begin{matrix} > 0 \\ > 0 \end{matrix}$

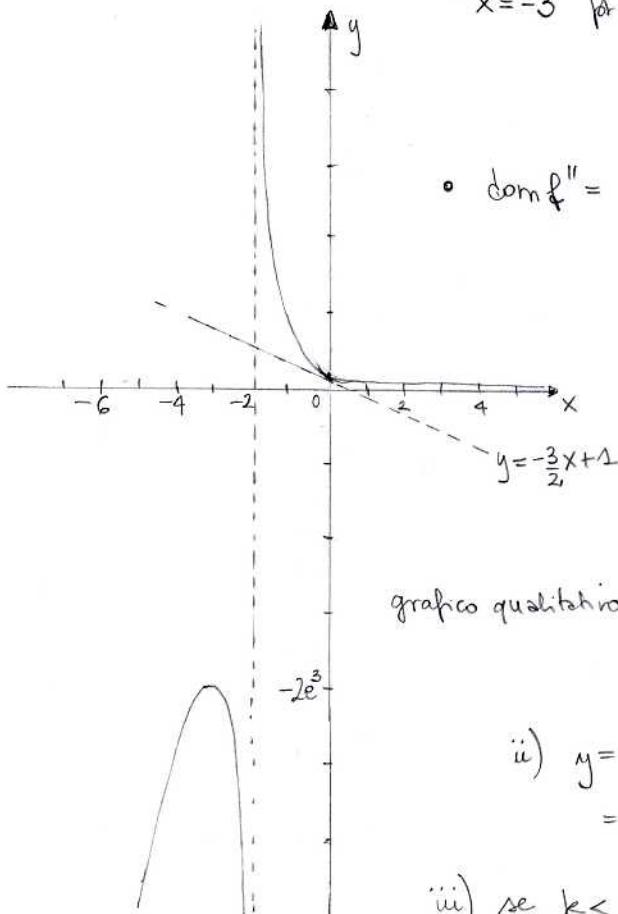
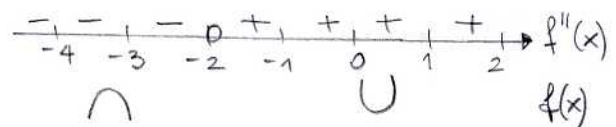


grafico qualitativo di f



ii) $y = 1 + f'(0)(x-0) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 1$
 $= 1 + \left(-\frac{6}{4}\right)(x-0)$

iii) se $k < -2e^3$ Sono 2 soluz. dell'eq. $f(x) = k$;

$k = -2e^3 \quad \exists 1 \text{ soluzione}$

se $-2e^3 < k \leq 0 \quad \nexists$ " "

$k > 0 \quad \exists 1 \text{ soluzione dell'eq. } f(x) = k.$

iv) $\int_1^3 e^x f(x) dx = \int_1^3 \frac{2}{x+2} dx = \left[2 \log|x+2| \right]_1^3 = 2 \log \frac{5}{3}$

6) Oss. che $f(x) = x^6 + x^2 - 1$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$; in particolare su $[0, 1]$. Inoltre $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 \in]0, 1[$ t.c. $f(x_0) = 0$ (poiché x^6 e $x^2 - 1$ sono funz. strett. crescenti su $[0, 1]$, f è strett. crescente su $[0, 1]$ essendo somma di due funz. strett. crescenti; quindi f si annulla in un solo pt. all'interno di $[0, 1]$). Quindi $\frac{1}{f(x)}$ non è ben definita su $[0, 1]$. 