

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2009/10 - TERZA PROVA INTERMEDIA - Rovereto, 22 gennaio 2010

FILA (A)

$$1) 2^{|x+1|} \cdot 2^{-x} - 2 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{|x+1|-x} \leq 2^1 \quad \Leftrightarrow \quad |x+1|-x \leq 1 \quad (2^x \uparrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ |x+1|-x \leq 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ -(x+1)-x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 1 \leq 1 \text{ (sempre vero)} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -1 \\ x \geq -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S = [-1, +\infty[}}$$

□

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1) - \log_{\frac{1}{3}}(1+|x|) > 1$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}(x^2-1) - \log_{\frac{1}{3}}(1+|x|) > \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ 1+|x| > 0 \text{ (sempre vero)} \\ \frac{x^2-1}{1+|x|} < \frac{1}{3} \text{ (log. x \downarrow)} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 1 \\ 3(x^2-1) < 1+|x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 3(x^2-1) < 1-x \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 1 \\ 3(x^2-1) < 1+x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 3x^2+x-4 < 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 1 \\ 3x^2-x-4 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ -\frac{4}{3} < x < 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 1 \\ -1 < x < \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{S =]-\frac{4}{3}, -1[\cup]1, \frac{4}{3}[}}$$

■

$$\begin{aligned} 2) i) \sum_{n=1}^5 f((-1)^n n) &= f(-1) + f(2) + f(-3) + f(4) + f(-5) = \\ &= (-1)^3 + 2^2 + (-3)^3 + 4^2 + (-5)^3 = -1 + 4 - 27 + 16 - 125 = \\ &= \underline{\underline{-133}}. \end{aligned}$$

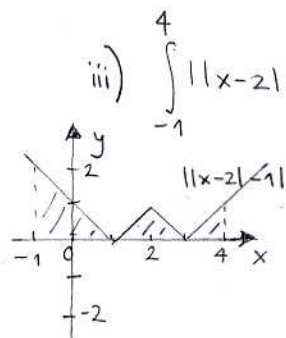
$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^6 (-1)^n f'(n) &= f'(2) - f'(3) + f'(4) - f'(5) + f'(6) = \\ &= 4 - 6 + 8 - 10 + 12 = \underline{\underline{8}}. \end{aligned}$$

$$f'(x) = 2x \quad \forall x > 0$$

□

$$ii) -\frac{3}{8} + \frac{5}{32} - \dots - \frac{11}{2048} = \sum_{n=1}^5 (-1)^n \frac{2n+1}{2^{2n+1}}$$

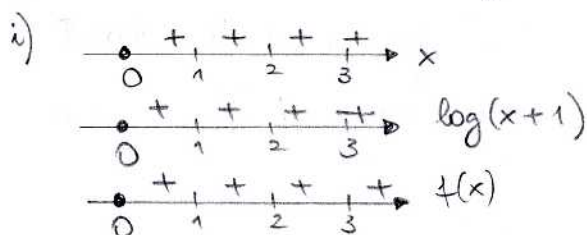
□



$$\text{iii)} \int_{-1}^4 ||x-2| - 1| dx = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}.$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{x}{x^2+1} + \sqrt[4]{x} \right) dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1} dx + \int_1^2 x^{\frac{1}{4}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\log(x^2+1) \right]_1^2 + \left[\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} \right]_1^2 = \frac{1}{2} (\log 5 - \log 2) + \frac{4}{5} (2^{\frac{5}{4}} - 1) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \log \frac{5}{2} + \frac{4}{5} (2\sqrt[4]{2} - 1)}}. \end{aligned}$$

3) $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x \log(x+1)$



ii) $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \log(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$ è una funzione derivabile su $[0, +\infty[$, (composizione, somma, prodotto di funzioni derivabili) e $\forall x \in [0, +\infty[$ si ha

$$\begin{aligned} F'(x) &= x \log(x+1) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x+1} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \\ &= x \log(x+1) + \frac{(x-1)(x+1)}{2} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = x \log(x+1) = f(x). \end{aligned}$$

iii) Poiché $f(x) > 0 \forall x \in]0, +\infty[$, l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalle rette di eq. $x=2$, $x=3$, $y=-1$

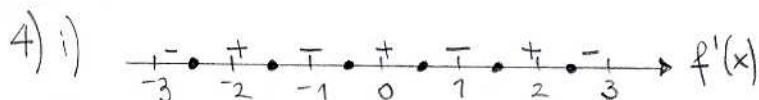
(la regione la indichiamo con E) è data da

$$\text{area } E = \int_2^3 (f(x) + 1) dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_2^3 1 dx =$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} F(3) - F(2) + [x]_2^3 = \left[\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) \log 4 - \frac{9}{4} + \frac{3}{2} \right] - \left[\left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) \log 3 - \frac{4}{4} + \frac{2}{2} \right] + 1$$

teor. di Torricelli e ii)

$$= 4 \log 4 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \log 3 + 1 = \underline{\underline{4 \log 4 - \frac{3}{2} \log 3 + \frac{1}{4}}}.$$



ii) $F(x) = \int_{-3}^x f(t) dt$ è la funzione integrale di f ; f è continua su $[-3, 3]$.

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x)$; poiché f è anche derivabile notturne allora dall'eq. precedente derivando l'eq.
 $F''(x) = f'(x) \quad \forall x \in [-3, 3]$ e quindi risulta (da i))

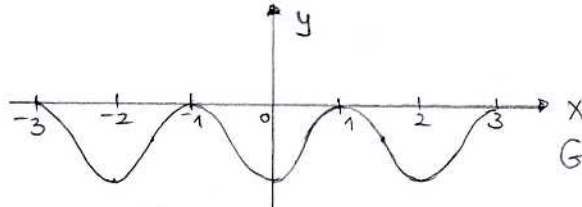
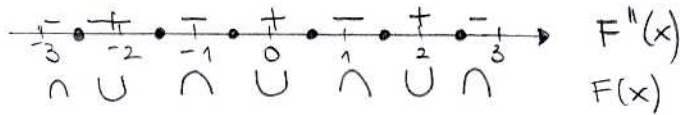


Grafico qualitativo di $F(x)$.

iii) Il dominio $[-3, 3]$ di F è simmetrico rispetto all'origine e $F(x) = F(-x)$
 $\forall x \in [-3, 3]$. F è pari!

iv) Ovviamente $\int_{-3}^3 F(x) dx < 0$.

5) i) $f(x) = \frac{1}{e^x(x+1)}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$ poiché $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

•

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x+1} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$

$x = -1$ asint. verticale per f

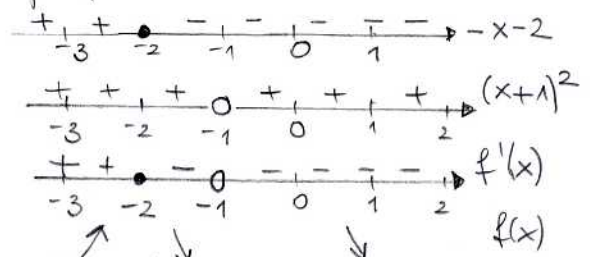
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$y = 0$ asint. orizzont. per f , per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

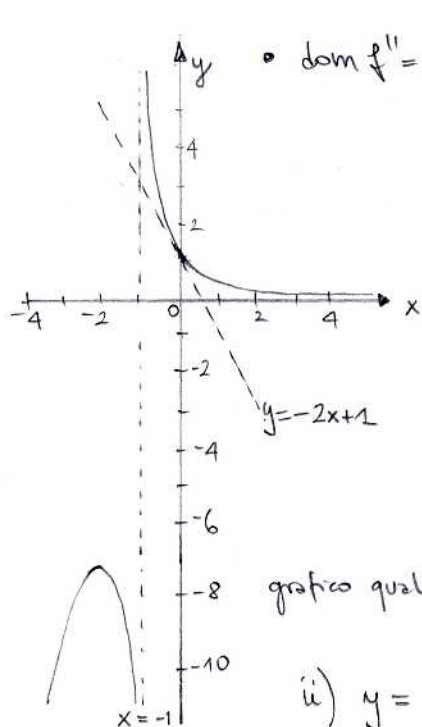
• $\text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $f'(x) = \frac{-[e^x(x+1) + e^x]}{e^{2x}(x+1)^2} =$
 $= \frac{-x-2}{e^x(x+1)^2}$

$x = -2$ è pt. critico per f



$x = -2$ pt. di max. loc. (ritetto) per f

$f(-2) = \frac{1}{e^{-2}(-1)} = -e^2 \quad (\approx -7.3)$



• $\text{dom } f'' = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f''(x) = \frac{-(e^x(x+1)^2) + (x+2)[e^x(x+1)^2 + e^x \cdot 2(x+1)]}{e^{2x}(x+1)^3}$$

$$= \frac{-x-1 + x^2+3x+2+2x+4}{e^x(x+1)^3}$$

$$= \frac{x^2+4x+5}{e^x(x+1)^3} > 0$$

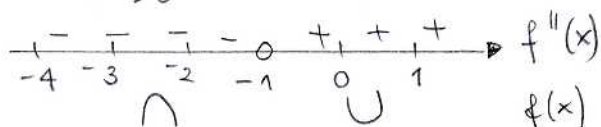


grafico qualitativo di f .

ii) $y = 1 + f'(0)(x-0) \Rightarrow \underline{y = -2x + 1}$
 $= 1 + (-2)(x-0)$

iii) se $k < -e^2$ Sono 2 soluz. dell'eq. $f(x) = k$;

$k = -e^2 \quad \exists$ 1 soluzione "

se $-e^2 < k \leq 0 \quad \nexists$ " "

$k > 0 \quad \exists$ 1 soluzione dell'eq. $f(x) = k$.

iv) $\int_2^3 e^x f(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{x+1} dx = [\log|x+1|]_2^3 = \underline{\underline{\log \frac{4}{3}}}$

6) Oss. che $f(x) = x^5 + x^2 - 1$ è una funzione continua su $\mathbb{R}$; in particolare su $[0, 1]$. Inoltre $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 \in]0, 1[$ t.c. $f(x_0) = 0$ (nota: poiché x^5 e $x^2 - 1$ sono funzioni strett. crescenti su $[0, 1]$, f è strett. crescente su $[0, 1]$ essendo somma di due funt. strett. crescenti; quindi f si annulla in un solo pt. all'interno di $[0, 1]$). Quindi $\frac{1}{f(x)}$ non è ben definita su $[0, 1]$.

FILA (B)

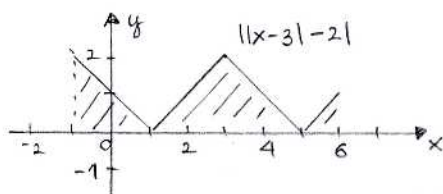
$$1) i) \sum_{n=1}^5 f((-1)^n n) = f(-1) + f(2) + f(-3) + f(4) + f(-5) = \\ = -(-1) + 2^2 - (-3) + 4^2 - (-5) = 1 + 4 + 3 + 16 + 5 = \underline{\underline{29}}.$$

$$\sum_{n=2}^6 (-1)^n f'(n) = f'(2) - f'(3) + f'(4) - f'(5) + f'(6) = \\ = 4 - 6 + 8 - 10 + 12 = \underline{\underline{8}}.$$

$f'(x) = 2x \quad \forall x > 0$

$$ii) \frac{3}{8} - \frac{5}{32} + \dots + \frac{11}{2048} = \sum_{n=1}^5 (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{2^{2n+2}}.$$

$$iii) \int_{-1}^6 ||x-3|-2| dx = \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} = \underline{\underline{\frac{13}{2}}}.$$



$$\int_1^2 \left(\frac{x}{x^2+2} - \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x}{x^2+2} dx - \int_1^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \\ = \frac{1}{2} \left[\log(x^2+2) \right]_1^2 - \left[\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} \right]_1^2 = \frac{1}{2} (\log 6 - \log 3) - \frac{4}{5} (2^{\frac{5}{4}} - 1) \\ = \underline{\underline{\frac{1}{2} \log 2 - \frac{4}{5} (2^{\frac{5}{4}} - 1)}}.$$

$$2) i) \begin{array}{cccccccccccc} + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & & \end{array} \rightarrow f'(x)$$

$$ii) F(x) = \int_{-3}^x f(t) dt \text{ è la funzione integrale di } f; f \text{ è continua su } [-3, 3].$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x)$; poiché f è anche derivabile si ottiene dall'eq. precedente derivando l'equazione $F''(x) = f'(x) \quad \forall x \in [-3, 3]$ e quindi da i) risulta

$$\begin{array}{cccccccccccc} + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & & & & & \end{array} \rightarrow F''(x)$$

$\cup \quad \cap \quad \cup \quad \cap \quad \cup \quad \cap \quad \cup$ $F(x)$

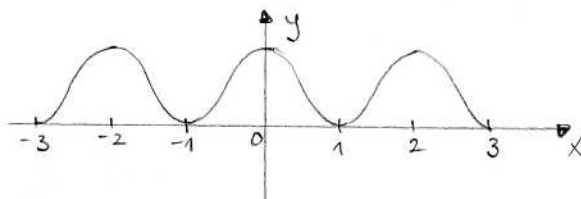


Grafico qualitativo di $F(x)$.

$$iii) \text{ Il dominio } [-3, 3] \text{ di } F \text{ è simmetrico rispetto all'origine e } F(x) = F(-x)$$

$$\forall x \in [-3, 3]. \quad F \text{ è pari!}$$

$$iv) \text{ Ovviamente } \int_{-3}^3 F(x) dx > 0.$$

$$3) 2^{|x+2|} \cdot 2^{-x} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 2^{|x+2|-x} \geq 2^2 \Leftrightarrow |x+2|-x \geq 2 \quad (2^x \uparrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+2-x \geq 2 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x+2 < 0 \\ -(x+2)-x \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 2 \geq 2 \text{ (sempre vero)} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -2 \\ x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S = \mathbb{R}}}. \quad \square$$

$$\log_{\frac{4}{3}}(x^2-1) - \log_{\frac{1}{3}}(1+|x|) < 1 \quad (\text{vedi FILA (A) Es. 1})$$

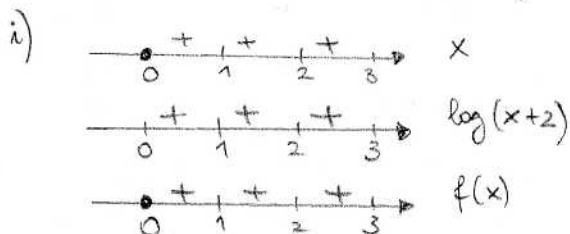
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ 1+|x| > 0 \\ \frac{x^2-1}{1+|x|} > \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \quad \circ \quad x > 1 \\ 3(x^2-1) > 1+|x| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 3x^2+x-4 > 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 1 \\ 3x^2-x-4 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x < -\frac{4}{3} \quad \circ \quad x > 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \quad \circ \quad x > \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, -\frac{4}{3}[\cup]\frac{4}{3}, +\infty[}}. \quad \blacksquare$$

$$4) f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x \log(x+2)$$



ii) $F(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) \log(x+2) - \frac{x^2}{4} + x$ è una funzione derivabile in $[0, +\infty[$,
e $\forall x \in [0, +\infty[$ si ha

$$\begin{aligned} F'(x) &= x \log(x+2) + \left(\frac{x^2}{2} - 2\right) \frac{1}{x+2} - \frac{x}{2} + 1 = \\ &= x \log(x+2) + \frac{(x-2)(x+2)}{2} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{x}{2} + 1 = x \log(x+2) = f(x). \end{aligned}$$

iii) Poiché $f(x) > 0 \quad \forall x \in]0, 1[$, l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalle rette di eq. $x=1$, $x=2$ e $y=-2$ (la regione la indichiamo con E) è data da

ii) $y = -1 + f'(0)(x-0) \Rightarrow \underline{y = -1.}$ □

iii) se $k < -1$ Sono 2 soluzioni dell'eq. $f(x) = k$;

$k = -1 \quad \exists 1$ soluzione "

se $-1 < k \leq 0$ ~~2~~ " "

$k > 0 \quad \exists 1$ soluzione dell'eq. $f(x) = k$. □

iv) $\int_2^3 e^x f(x) dx = \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = [\log|x-1|]_2^3 = \underline{\log 2.}$ ■

6) Oss. che $f(x) = 2^x - x^6 - \frac{1}{2}$ è una funzione continua in $\mathbb{R}$; in particolare in $[-1, 0]$. Inoltre $f(-1) = -1$, $f(0) = \frac{1}{2}$. Per il teorema di esistenza degli zeri esiste $x_0 \in]-1, 0[$ t.c. $f(x_0) = 0$ (nota: poiché 2^x e $-x^6 - \frac{1}{2}$ sono funzioni strett. crescenti in $[-1, 0]$, f è strett. crescente in $[-1, 0]$ essendo somma di due funzioni strett. crescenti; quindi f si annulla in un solo punto all'interno di $[-1, 0]$). Quindi $\frac{1}{f(x)}$ non è ben definita in $[-1, 0]$. ■