COGNOME ______________________

NOME ______________________

MATRICOLA

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 22 GENNAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$2^{|x+1|}\cdot 2^{-x}-2\le 0\,; \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x^2-1)-\log_{\frac{1}{3}}(1+|x|)>1\,.$$

2) i) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x\ge 0\\ x^3 & \text{se } x<0\,.\end{cases}$$

Calcolate $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} f((-1)^n n)$ e $\displaystyle\sum_{n=2}^{6}(-1)^n f'(n)$, dove f' è la funzione derivata prima di f.

ii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione:

$$-\frac{3}{8}+\frac{5}{32}-\ldots-\frac{11}{2048}\,.$$

iii) Calcolate $\displaystyle\int_{-1}^{4}||x-2|-1|\,dx\,;$ $\qquad \displaystyle\int_{1}^{2}\left(\frac{x}{x^2+1}+\sqrt[4]{x}\right)dx\,.$

3) Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x\log(x+1)$.

i) Determinate il segno di f.

ii) Verificate che $F(x) = (\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2})\log(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}$ è una primitiva di $f(x)$.

iii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalle rette di equazione $x = 2$, $x = 3$ e $y = -1$.

---

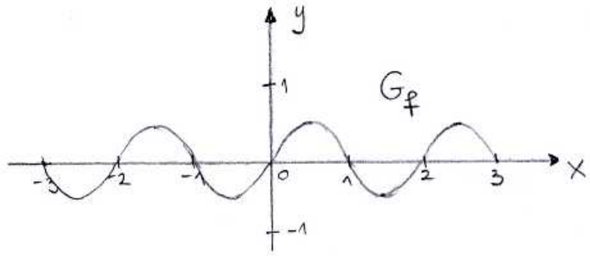
4) Sia $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura. Sia $F : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\, dt$.

i) Rappresentate sulla retta reale il segno di $f'(x)$.

ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano la funzione $F(x)$ dopo aver individuato gli intervalli di convessità/concavità della funzione F.

iii) Dite se F è pari o dispari.

iv) Determinate il segno di $\int_{-3}^{3} F(x)\, dx$.



---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{e^x(x+1)}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(0, 1)$. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f.

iii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.

iv) Calcolate $\int_{2}^{3} e^x f(x)\, dx$.

---

6) Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^5 + x^2 - 1$. È ben definita su $[0, 1]$ la funzione $\frac{1}{f(x)}$? Motivate la risposta.

COGNOME __________	NON SCRIVERE QUI		B
NOME __________			
MATRICOLA	1 2 3 4 5 6		

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

TERZA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2009-2010 — ROVERETO, 22 GENNAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **DUE ORE E MEZZA**.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \,. \end{cases}$$

Calcolate $\sum_{n=1}^{5} f((-1)^n n)$ e $\sum_{n=2}^{6} (-1)^n f'(n)$, dove f' è la funzione derivata prima di f.

ii) Scrivete, usando il simbolo di sommatoria, la seguente espressione:

$$\frac{3}{8} - \frac{5}{32} + \ldots + \frac{11}{2048}\,.$$

iii) Calcolate $\int_{-1}^{6} ||x-3|-2|\,dx\,;$ $\qquad \int_{1}^{2} \left(\frac{x}{x^2+2} - \sqrt[4]{x}\right) dx\,.$

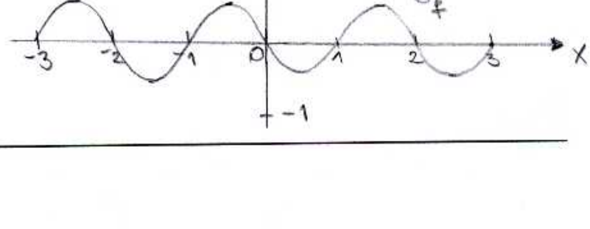
2) Sia $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura. Sia $F : [-3,3] \to \mathbb{R}$ la funzione integrale di f definita da $F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$.

i) Rappresentate sulla retta reale il segno di $f'(x)$.

ii) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano la funzione $F(x)$ dopo aver individuato gli intervalli di convessità/concavità della funzione F.

iii) Dite se F è pari o dispari.

iv) Determinate il segno di $\int_{-3}^{3} F(x)\,dx$.



3) Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$2^{|x+2|} \cdot 2^{-x} - 4 \geq 0 ; \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x^2-1) - \log_{\frac{1}{3}}(1+|x|) < 1 .$$

---

4) Sia $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x\log(x+2)$.
i) Determinate il segno di f.
ii) Verificate che $F(x) = (\frac{x^2}{2} - 2)\log(x+2) - \frac{x^2}{4} + x$ è una primitiva di $f(x)$.
iii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dalle rette di equazione $x = 1$, $x = 2$ e $y = -2$.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{e^x(x-1)}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Determinate l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(0,-1)$. Rappresentatela graficamente nello stesso sistema di riferimento della f.
iii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
iv) Calcolate $\int_2^3 e^x f(x)\,dx$.

---

6) Sia $f : [-1,0] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = 2^x - x^6 - \frac{1}{2}$. È ben definita su $[-1,0]$ la funzione $\frac{1}{f(x)}$? Motivate la risposta.