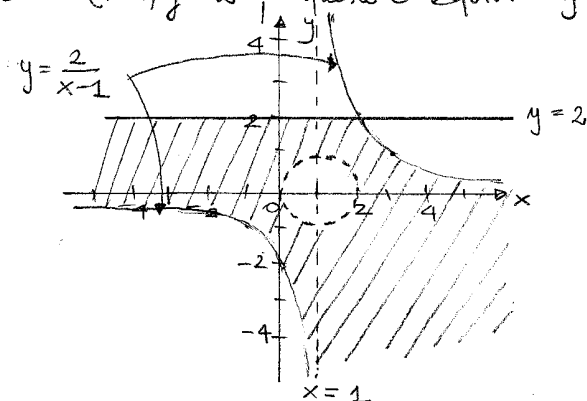


Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2009/10 - Rovereto, 12-16 ottobre 2009

$$1) i) \begin{cases} (x-1)y \leq 2 \\ x^2 - 2x + y^2 > 0 \\ y \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)y \leq 2 \\ (x-1)^2 + y^2 > 1 \\ y \leq 2 \end{cases}$$

Consideriamo $(x-1)y = 2$: questo è equiv. $y = \frac{2}{x-1}$ per $x \neq 1$

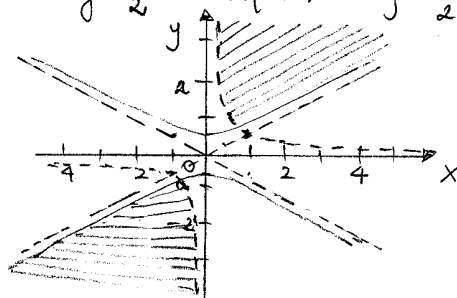


/// = soluzione del sistema



$$ii) \begin{cases} xy > \frac{1}{2} \\ x^2 - 4y^2 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy > \frac{1}{2} \\ -x^2 + \frac{y^2}{4} \geq 1 \end{cases}$$

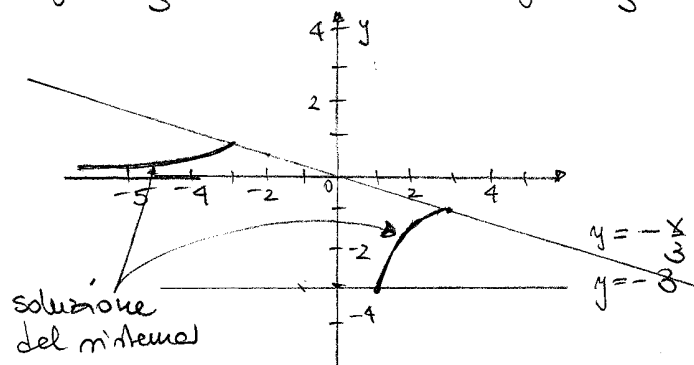
Consideriamo che $xy = \frac{1}{2}$ è equiv. $y = \frac{1}{2x}$ per $x \neq 0$.



/// = soluzione del sistema



$$iii) \begin{cases} xy = -3 \\ -3 \leq y \leq -\frac{x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3}{x} \text{ per } x \neq 0 \\ -3 \leq y \leq -\frac{x}{3} \end{cases}$$



soluzione del sistema



$$2) i) A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 1} < 1\} = \underline{\underline{]-1/4, +\infty[}}$$

$$\text{infatti, } \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-4x - 1}{x^2 + 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x + 1}{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{4}$$

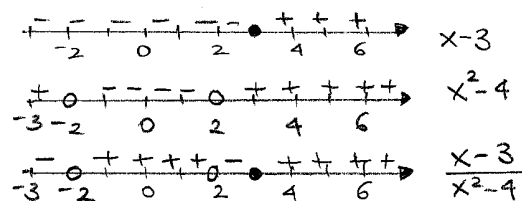
Allora A è limitato inferiormente (ma non ha minimo); A non è limitato superiormente. $\square$

$$ii) B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2 + 4} \leq 1\} = \underline{\underline{\mathbb{R}}} = \underline{\underline{]-\infty, +\infty[}}$$

rimetta che B non è limit. inferiormente e non è limitato superiormente $\square$

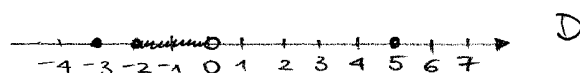
$$iii) C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-3}{x^2-4} \geq 0\}$$

$$= \underline{\underline{]-2, 2[\cup [3, +\infty[}}$$



si ha che C è limitato inferiormente; non ha però minimo. C non è limitato superiormente. $\square$

$$iv) D = [-2, 0[\cup \{-3, 5\}$$

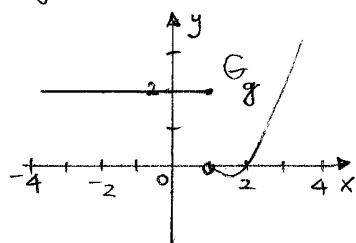


D è un insieme limitato; inoltre $\underline{\underline{\min D = -3}}$, $\underline{\underline{\max D = 5}}$. $\blacksquare$

$$3) i) f: [-4, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

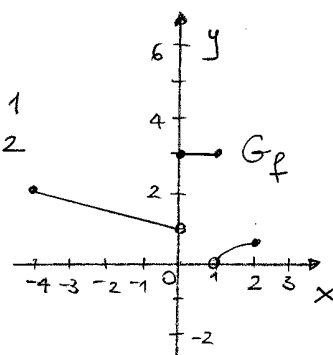
$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + 1 & \text{se } -4 \leq x < 0 \\ 3 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} + 1 & \text{se } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \underline{\underline{]-1/4, +\infty[}}$$



$$g(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ (x-1)(x-2) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 1 \\ (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



$\square$

ii) $f(-4) = -\frac{1}{4}(-4) + 1 = \underline{2}$ $f(0) = \underline{3}$

$g(0) = 2$ e quindi $\underline{f(-4) = g(0)}$. □

iii) $f([-1, 1]) = \underline{\underline{[1, \frac{5}{4}] \cup \{3\}}}$; $g(\mathbb{R}) = \underline{\underline{[-\frac{1}{4}, +\infty[}}$ □

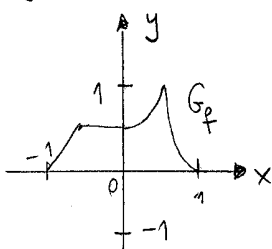
iv) f non è iniettiva: basta prendere $x_1 = 0 \neq 1 = x_2$ e $f(x_1) = f(x_2) = 3$.

f non è suriettiva, poiché $f([-4, 2]) =]0, \frac{1}{2}] \cup]1, 2] \cup \{3\} \subsetneq \mathbb{R}$.

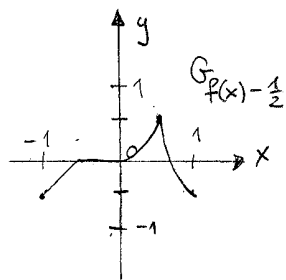
•• g non è iniettiva: basta prendere $x_1 = 0 \neq 1 = x_2$ e $g(x_1) = g(x_2) = 2$.

g è suriettiva, poiché $g(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{4}, +\infty[$. ■

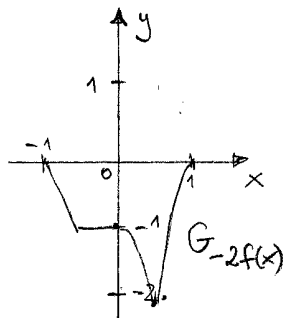
4)



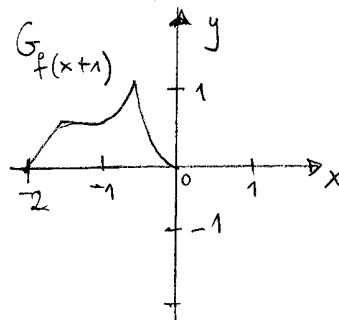
$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$



$x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}$
 $\uparrow$
 $[-1, 1]$

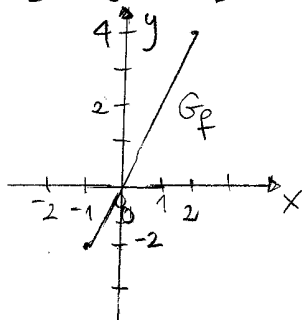


$x \mapsto -2f(x)$
 $\uparrow$
 $[-1, 1]$



$x \mapsto f(x+1)$
 $\uparrow$
 $[-2, 0]$ ■

5) $f: [-1, 2] \rightarrow [-2, 4]$ iniettiva e suriettiva



Questo è un esempio: $f(x) = 2x$ $x \in [-1, 2]$. ■