Università degli Studi di Trento – Facoltà di Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
a.a. 2009/10 – Rovereto, 21 – 25 settembre 2009

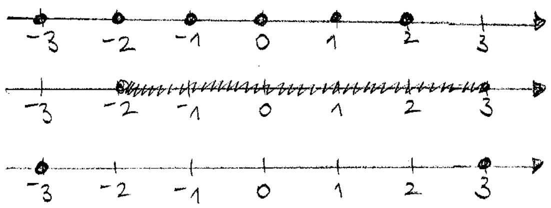
1) $A = \{n \in \mathbb{Z} : -8 < 3n+4 \leq 12\}$
$= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$$-8 < 3n+4 \leq 12$$
$$\Leftrightarrow \quad -12 < 3n \leq 8$$
$$\Leftrightarrow \quad -4 < n \leq 8/3$$

$B = [-2, 3]$

$C = \{-3, 3\}$.

a)



$\bullet = A$

$/\!/\!/ = B$

$\circ = C$

b) $A \cap B = \underline{\{-2, -1, 0, 1, 2\} = A \setminus \{-3\}}$

$B \cup C = \underline{B \cup \{-3\}}$

$B \setminus A = \underline{]-2,-1[\cup]-1,0[\cup]0,1[\cup]1,2[\cup]2,3]}$

$A \cap B \cap C = \underline{\emptyset}$

2) i) $A =]-\infty, -3] \cup]0, 4]$

$B = \{x \in \mathbb{Z} : (x^2 - \frac{1}{3}x)(x^2-1) = 0\}$

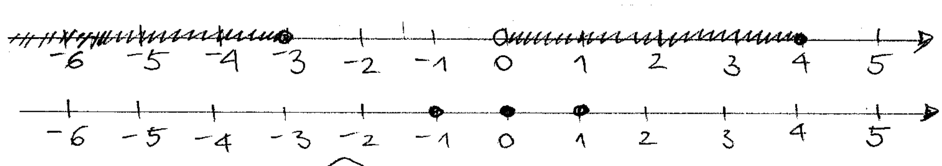
ora $(x^2 - \frac{1}{3}x)(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - \frac{1}{3}x = 0$ oppure $x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x(x - \frac{1}{3}) = 0$ oppure $x^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ opp. $x = \frac{1}{3}$ opp. $x = -1$ opp. $x = 1$.

$\Rightarrow \underline{B = \{-1, 0, 1\}}$



$/\!/\!/ = A$

$\bullet = B$

$A \cap B = \{1\}$ (V) (poiché $1 \in A$ e $1 \in B$, mentre $-1 \notin A$ e $0 \notin A$).

$A \cup B = A$ (F) poiché $A \cup B =]-\infty, -3] \cup \{-1\} \cup [0, 4]$.

$A\setminus B = A\setminus\{1\}$ (V) poiché $A\setminus B =]-\infty,-3] \cup]0,1[\cup]1,4]$
e $A\setminus\{1\} =]-\infty,-3] \cup]0,1[\cup]1,4]$

$0 \in A$ (F)

$-1 \subseteq B$ (F) La scrittura è scorretta!

$\{-1,0\} \subset B$ (V) poiché ogni elemento di $\{-1,0\}$ è un elemento di B.

$1 \in B$ (V)

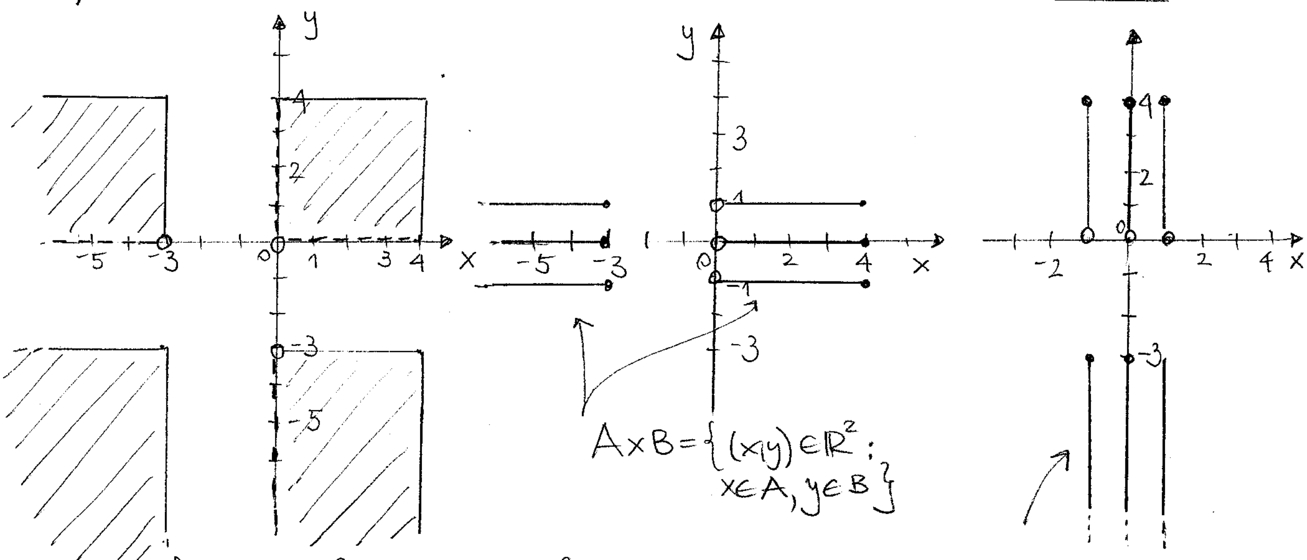
$[1,4[\in \mathcal{P}(A)$ (V) poiché $[1,4[\subset A$.

$\{\{-3\}, A\} \subset \mathcal{P}(A)$ (V) poiché $\{-3\} \in \mathcal{P}(A)$ e anche $A \in \mathcal{P}(A)$.

$]-3,0] \subseteq \mathbb{R}\setminus A$ (V) poiché $\forall x \in]-3,0]$ si ha $x \notin A$.

$B\setminus A = \{-1\}$ (F) poiché $B\setminus A = \{-1,0\}$. $\square$

ii) $A\times A$ $A\times B$ $B\times A$



$A\times B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in A, y\in B\}$

$A\times A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in A, y\in A\}$

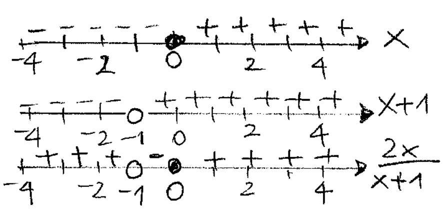
$B\times A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in B, y\in A\}$

3) i) $A = \left\{x\in\mathbb{R} : \dfrac{3x+x^2}{x+1} \le x\right\}$

$=]-1,0]$

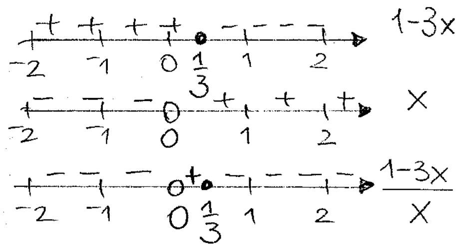
$$\frac{3x+x^2}{x+1} - x \le 0 \iff \frac{3x+\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-x}{x+1} \le 0$$

$$\frac{2x}{x+1} \le 0$$



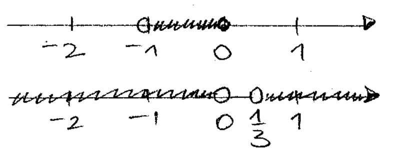
$B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} < 3\}$ $\qquad \frac{1}{x} < 3 \iff \frac{1}{x} - 3 < 0 \iff$

$=]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$ $\qquad \frac{1-3x}{x} < 0$



ii) $A \cup B =]-\infty, 0] \cup]\frac{1}{3}, +\infty[$.

$A \setminus B = \{0\}$.

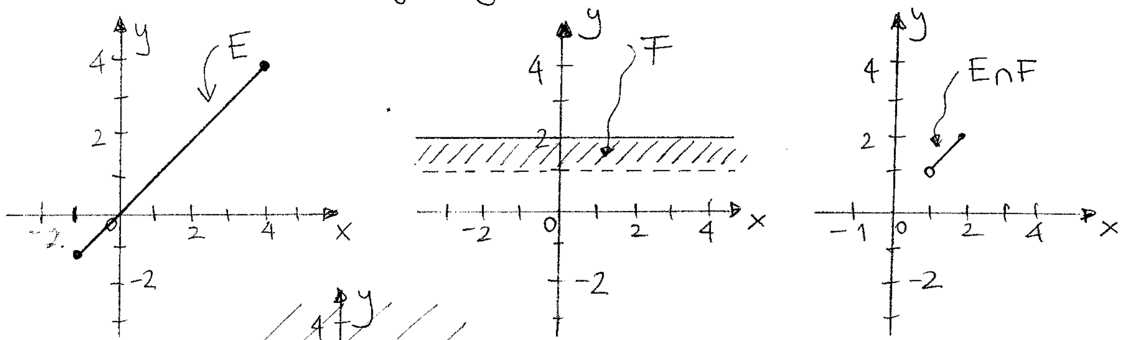


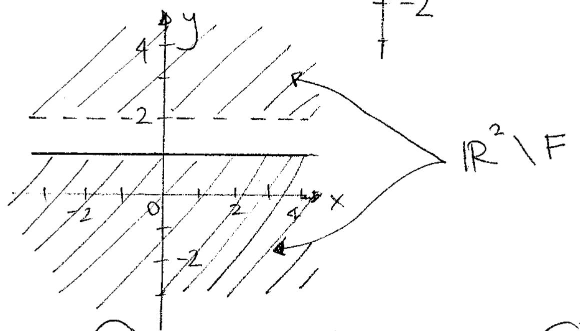
$A \cup B$ non è un intervallo di $\mathbb{R}$,

essendo l'unione di due intervalli disgiunti.

4) i) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 4,\ y = x\}$

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < y \le 2\}$





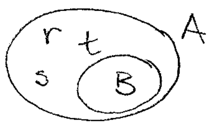
$(1,1) \in E$ (V) $\qquad (0,1) \in F$ (F) poiché deve essere $1 < y \le 2$.

$(2,2) \in E \cap F$ (V)

$(0,2) \in \mathbb{R}^2 \setminus E$ (V)

5) $A \cup B = A$

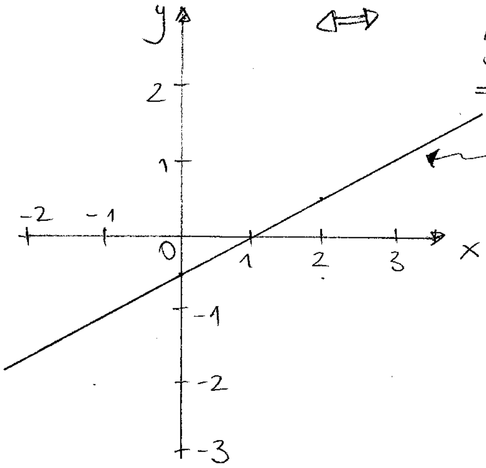
$A \setminus B = \{r, s, t\}$



$B \subseteq A$ sempre vero! (è vero che $B \subset A$; se fosse $B = A$ allora $A \setminus B = \emptyset$ contro le ns. ipotesi. Se esistesse un elemento $v \in B : v \notin A$ allora $A \cup B \ne A$).

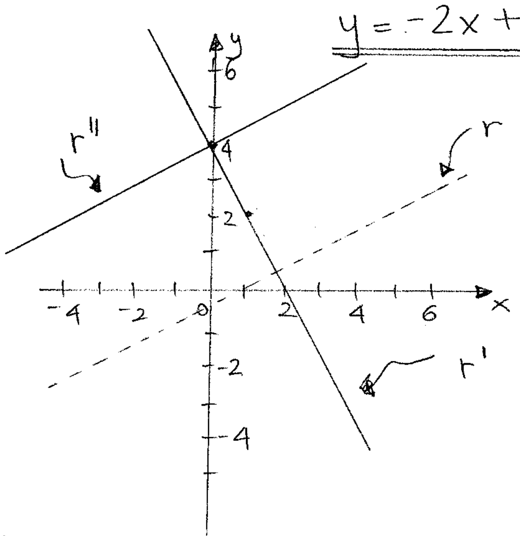
$A \cap B \neq \{r\}$ sempre vero ! (se fosse $A \cap B = \{r\}$, allora $A \setminus B$ non potrebbe essere $\{r, s, t\}$

6) i) $-x+2y+1=0 \iff 2y = x-1 \iff y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$



ii) r' : r' avrà pendenza $m=-2$ (essendo $\perp$ alla retta r) e quindi l'eq. della retta sarà $y = 2-2(x-1)$, ossia $y=-2x+4$

(eq. della retta di pend. m e pass. per un pt. $P=(x_0,y_0)$ è $y = y_0 + m(x-x_0)$!)



iii) $Q=(0,4)$ pt. di intersezione di r' con l'asse delle ordinate (= asse y).

r'' avrà pendenza $m=\frac{1}{2}$ (essendo $\parallel$ alla retta r) e quindi l'eq della retta sarà $y = 4+\frac{1}{2}(x-0)$, ossia $y=\frac{1}{2}x+4$

La sua rappresentazione grafica si trova nel disegno in ii).