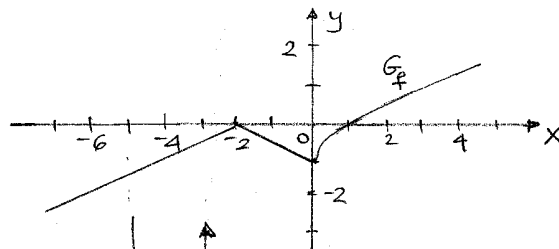


Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione
 ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2009/10 - Rovereto, 2-6 novembre 2009

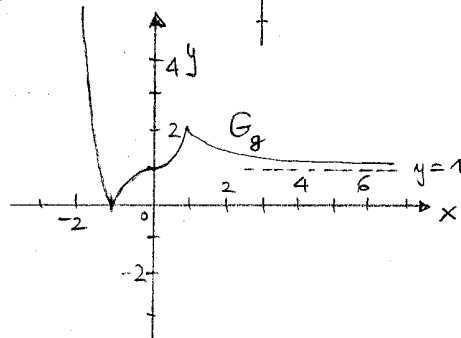
1) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|x+2| & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt[4]{x} - 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} |x^3 + 1| & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



ii) se $k < -1$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$;

$k = -1$ Sono due soluzioni " ;

$-1 < k < 0$ Sono tre soluzioni " ;

$k = 0$ Sono due soluzioni " ;

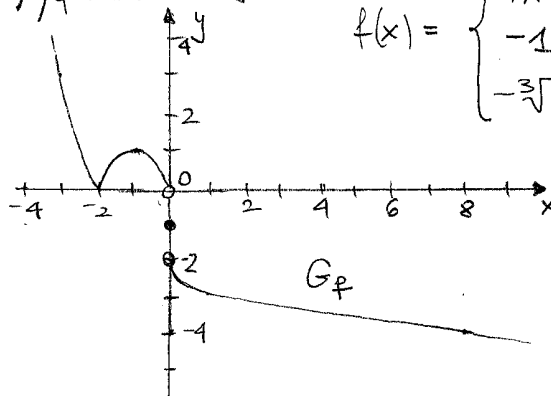
$k > 0$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$. □

iii) Nell'intervallo $]-\infty, -2]$ e nell'intervallo $[0, +\infty[$ la funzione f è crescente, mentre è una funzione decrescente se ristretta all'intervallo $[-2, 0]$.

La funzione g ristretta all'intervallo $]-\infty, -1]$ oppure all'intervallo $[1, +\infty[$ è decrescente, mentre g ristretta a $[-1, 1]$ è crescente. ■

2) i) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 + 2x| & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ -\sqrt[3]{x} - 2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$



Oss. che $x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$ e

quindi $|x^2 + 2x| = |(x+1)^2 - 1|$. □

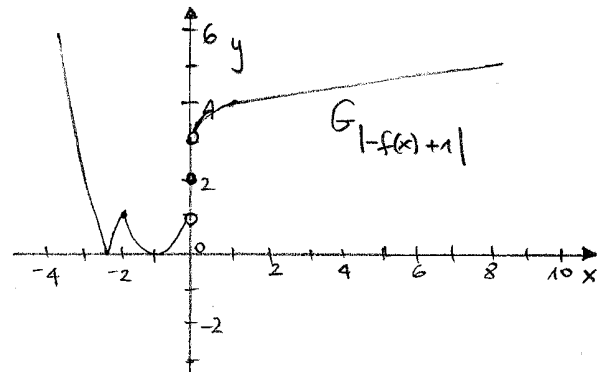
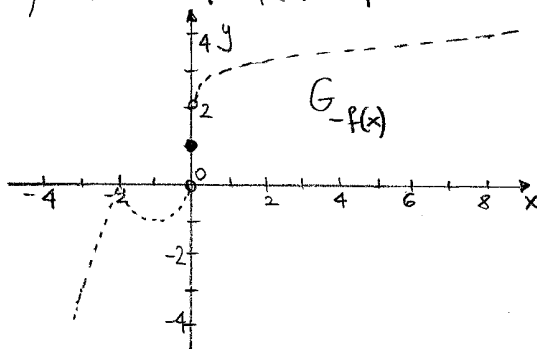
ii) la funzione f è decrescente se ristretta all'intervallo $]-\infty, -2]$
oppure all'intervallo $[-1, +\infty[$;

risulta invece una funzione crescente se ristretta all'intervallo $[-2, -1]$. □

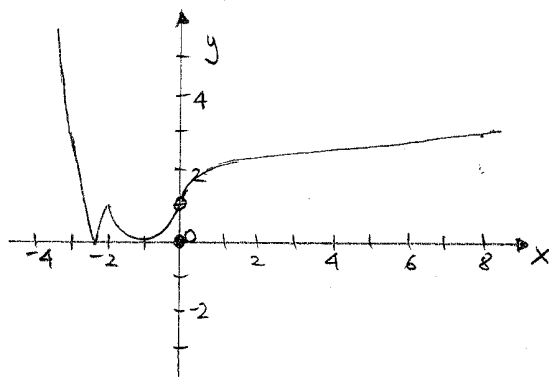
iii) $\min_{[-2, 0]} f = -1$ $x=0$ pt. di minimo;

$\max_{[-2, 0]} f = 1$ $x=-1$ pt. di massimo. □

iv) $x \mapsto |-f(x)+1|$



$x \mapsto ||f(x)|-1|$



3) $4|x-2| > 12 \iff |x-2| > 3 \iff x-2 < -3 \text{ o } x-2 > 3$

$\iff x < -1 \text{ o } x > 5$

Dunque $S =]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[$

$| -2x | + | x | = 4 \iff 2|x| + |x| = 4 \iff 3|x| = 4 \iff x_{1/2} = \pm \frac{4}{3}, \text{ ossia}$

Dunque $S = \left\{ -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right\}$.

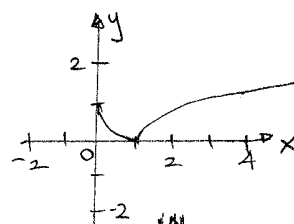
$$|4x^2 - 1| \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{1}{4} ;$$

quindi $S = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.

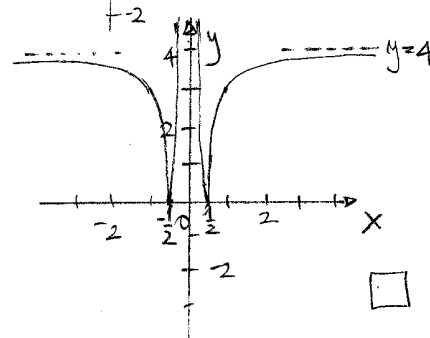
$$|x^2 + 2x| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x \neq 0 ; \text{ m ha } \underline{S = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}}.$$

$$||x| - 1| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq |x| - 1 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{-1 \leq |x| \leq 3}_{\forall x \in \mathbb{R}} \Rightarrow \underline{S = [-3, 3]}.$$

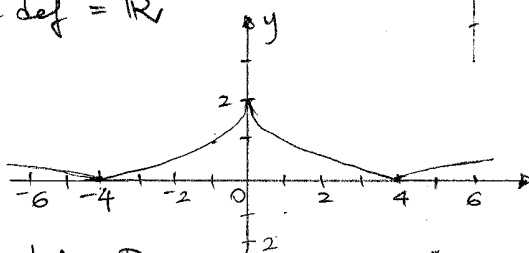
4) $|1 - \sqrt{x}|$ insieme def. = $[0, +\infty[$



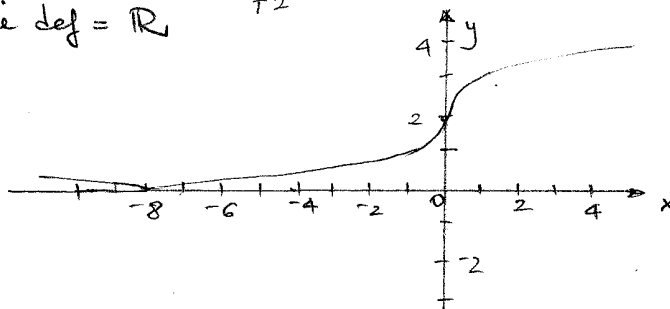
$|\frac{1}{x^2} - 4|$ insieme def. = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



$|\sqrt{|x|} - 2|$ insieme def. = $\mathbb{R}$



$|\sqrt[3]{x} + 2|$ insieme def. = $\mathbb{R}$



5) a) $x^2 - 2|x| - 8 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{(I)} \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 8 < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{(II)} \begin{cases} x < 0 \\ x^2 + 2x - 8 < 0 \end{cases}$

Oss. che $x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \begin{matrix} -2 \\ 4 \end{matrix}$

$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix}$

quindi (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \in]-2, 4[\end{cases}$ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \in]-4, 2[\end{cases}$

e quindi (I) $\Leftrightarrow x \in [0, 4[$ (II) $\Leftrightarrow x \in]-4, 0[$,

infine $S =]-4, 0[\cup [0, 4[= \underline{\underline{]-4, 4[}}$. □

$\frac{x+3}{|x|+1} \leq 2 \Leftrightarrow x+3 \leq 2(|x|+1)$ (nota: $|x|+1 > 0$!!)

$\Leftrightarrow 0 \leq 2|x| - x - 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x - x - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ -2x - x - 1 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ 3x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [1, +\infty[}}$. □

$x^2 - x|x+1| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2 - x(x+1) > 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ x^2 + x(x+1) > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ -x > 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -1 \\ 2x^2 + x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in [-1, 0[\quad \circ \quad x \in]-\infty, -1[$

$\Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, 0[}}$. □

ii) $4^x < 64 \Leftrightarrow 4^x < 4^3 \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, 3[}}$ (nota: $4^x \uparrow$)

$4^{-|x|} \leq \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^{-2|x|} \leq 2^{-3} \Leftrightarrow -2|x| \leq -3$ (nota: $2^x \uparrow$)

$\Leftrightarrow |x| \geq \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[}}$.

$\left(\frac{1}{9}\right)^{|x+1|} = 1 \Leftrightarrow |x+1| = 0 \Rightarrow \underline{\underline{S = \{-1\}}}$.

$3^{|x^2-2|} > 1 \Leftrightarrow |x^2-2| > 0 \Leftrightarrow x^2-2 \neq 0 \Leftrightarrow x_{\frac{1}{2}} \neq \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{S = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}}}$. ■