COGNOME ____________________

NOME ____________________

MATRICOLA |_|_|_|_|_|_|

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2010-2011 — ROVERETO, 10 GENNAIO 2011

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due proposizioni. Usando la tavola della verità provate che la proposizione **non**$[\mathcal{A}$**e**$($**non**$\mathcal{B})]$ è equivalente alla proposizione $($**non**$\mathcal{A})$**o**$\mathcal{B}$.

ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x|x-2| < 3\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{3x+3} \leq 1\}.$$

a) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.
b) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$.
c) Rappresentate graficamente l'insieme $A \times A$.

2) Sia C_1 il centro della circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$$

e sia C_2 il centro dell'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione

$$x^2 + 16y^2 - 4x = 0.$$

i) Scrivete l'equazione della retta r passante per C_1 e per C_2.
ii) Scrivete l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per C_1.
iii) Rappresentate graficamente $\mathcal{C}$ e $\mathcal{E}$. Rappresentate le rette r e r' nello stesso sistema di riferimento della circonferenza e dell'ellisse.

3) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2|x+1| & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} + 1 & \text{se } x > 0\,, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{se } x \leq 1 \\ 3x - 2 & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g.
ii) Determinate l'immagine di f.
iii) Rappresentate la funzione inversa g^{-1} (motivando l'esistenza di g^{-1}).
iv) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di f su $[-2, 1]$. Indicate anche gli eventuali punti di minimo e/o di massimo locali.
v) Calcolate $(f+g)(-1)$, $(fg)(1)$ e $(g \circ f)(0)$.
vi) Rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto f(x-1)$ e $x \mapsto |-g(x)+1|$.

---

4) i) Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$\frac{2^x 2^{|x+1|}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}} < 1\,; \qquad \log_2(|x|-2) + \log_2(3+x) > \log_2 6\,.$$

ii) Calcolate

$$\int_0^4 |x^2 - 1|\, dx\,; \qquad \int_1^2 \Big(\frac{2x^2}{x^3+1} + x^{-2} + 1\Big)\, dx\,.$$

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = (2-x)e^{2x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Verificate che $F(x) = (\frac{5}{4} - \frac{x}{2})e^{2x}$ è una funzione primitiva di f su $\mathbb{R}$.
iii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dal grafico di $g(x) = -x + 2$.

---

6) Determinate una funzione continua $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti proprietà:
a) $f(0) = -1$ e $f(3) = -1$;
b) la funzione integrale $F(x)$ di $f(x)$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$ per $x \in [0, 3]$ è decrescente su $[0, 1]$, è crescente su $[1, 2]$ ed è decrescente su $[2, 3]$.

COGNOME ______________________		NON SCRIVERE QUI	B
NOME ______________________		1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA ⌊⌊⌊⌊⌊⌊⌋			

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2010-2011 — ROVERETO, 10 GENNAIO 2011

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due proposizioni. Usando la tavola della verità provate che la proposizione $\mathbf{non}[\mathcal{A}\mathbf{o}(\mathbf{non}\mathcal{B})]$ è equivalente alla proposizione $(\mathbf{non}\mathcal{A})\mathbf{e}\mathcal{B}$.

ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x|x-3| \leq 4\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-1}{2x+2} \leq 1\}.$$

a) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.
b) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$.
c) Rappresentate graficamente l'insieme $A \times A$.

2) Sia C_1 il centro della circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$$

e sia C_2 il centro dell'ellisse $\mathcal{E}$ di equazione

$$16x^2 + y^2 - 4y = 0.$$

i) Scrivete l'equazione della retta r passante per C_1 e per C_2.
ii) Scrivete l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per C_2.
iii) Rappresentate graficamente $\mathcal{C}$ e $\mathcal{E}$. Rappresentate le rette r e r' nello stesso sistema di riferimento della circonferenza e dell'ellisse.

3) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{se } x > 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 0 \\ x^3 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g.
ii) Determinate l'immagine di f.
iii) Rappresentate la funzione inversa g^{-1} (motivando l'esistenza di g^{-1}).
iv) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di f su $[-3, 1]$. Indicate anche gli eventuali punti di minimo e/o di massimo locali.
v) Calcolate $(f+g)(-1)$, $(fg)(1)$ e $(g \circ f)(0)$.
vi) Rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto f(x-1)$ e $x \mapsto |-g(x)+1|$.

---

4) i) Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$\frac{2^x 2^{|x+1|}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}} \geq 1; \qquad \log_2(|x| - 2) + \log_2(3+x) \leq \log_2 6.$$

ii) Calcolate

$$\int_{-3}^{0} |x^2 - 1| \, dx; \qquad \int_1^2 \left(\frac{3x^3}{x^4+1} + x^{-1} + 1\right) dx.$$

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = (x-1)e^{2x}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.
ii) Verificate che $F(x) = (\frac{x}{2} - \frac{3}{4})e^{2x}$ è una funzione primitiva di f su $\mathbb{R}$.
iii) Determinate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dal grafico di $g(x) = x - 1$.

---

6) Determinate una funzione continua $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ soddisfacente le seguenti proprietà:
a) $f(0) = 1$ e $f(3) = 1$;
b) la funzione integrale $F(x)$ di $f(x)$ definita da $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ per $x \in [0,3]$ è crescente su $[0,1]$, è decrescente su $[1,2]$ ed è crescente su $[2,3]$.