

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

A

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2010-2011 — ROVERETO, 24 GENNAIO 2011

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Sia $\mathcal{A}(x, y, z)$ il predicato definito da $\mathcal{A}(x, y, z) = \text{"Il test } y \text{ viene svolto nella Facoltà } x \text{ dell'Università degli Studi } z \text{"}$. Scrivete in italiano corrente i seguenti enunciati:
- a) $\exists y : \forall x, \mathcal{A}(x, y, \text{Trento})$.
 - b) $\forall z, \exists y : \forall x, \mathcal{A}(x, y, z)$.
- ii) Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:
- a) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 0$.
 - b) $-2 \in \{x \in \mathbb{R} : ||1 - x^2| + x| < 1\}$.

- 2) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(3x - x^2)|x|} > 0\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x - 2|}{x^2 - 1} \leq 0\}.$$

- i) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.
- ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $B \setminus A$.
- iii) Dite se A e B sono insiemi limitati.
- iv) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo di B . B è un intervallo?
- v) Rappresentate graficamente l'insieme $A \times B$.

3) Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ 2 & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g .
 - ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
 - iii) Calcolate, se esistono, $(f \circ g)(5)$, $(fg)(0)$, $(\frac{f}{g})(1)$ e $(\frac{g}{f})(1)$.
 - iv) Rappresentate graficamente, nel loro insieme di definizione, le funzioni $x \mapsto |f(x) - 1|$ e $x \mapsto g(x+2)$.
-

4) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$\frac{2^{|x^2-4|}}{2^4} \geq 2^{-3}; \quad \log_4 \left(\frac{3x}{x^2-4} \right) \leq 0.$$

- ii) Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = 2 - |x|$ e $g(x) = x^2 - 4$. Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dal grafico di g .
-

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{2 \cdot 2^x}{2^x + 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico f e dalle rette di equazioni $y = -x + 1$ e $x = 3$.
 - iii) Determinate, se esistono, le equazioni di tutte le rette orizzontali che non intersecano mai il grafico di f .
-

6) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme delle coppie (x, y) soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 \leq 4 \\ y - x^2 - 2 \leq 0 \\ 3y + 2x + 6 > 0. \end{cases}$$

COGNOME _____

NOME _____

MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

B

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA

CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE

CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2010-2011 — ROVERETO, 24 GENNAIO 2011

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Sia $\mathcal{A}(x, y, z)$ il predicato definito da $\mathcal{A}(x, y, z) = \text{"Il test } y \text{ viene svolto nella Facoltà } x \text{ dell'Università degli Studi } z \text{"}$. Scrivete in italiano corrente i seguenti enunciati:
- a) $\exists z : \forall x, \mathcal{A}(x, \text{Matematica di base}, z)$.
 - b) $\exists y : \forall x, z, \mathcal{A}(x, y, z)$.
- ii) Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:
- a) $-1 \in \{x \in \mathbb{R} : ||1 - x^2| + x| > 1\}$.
 - b) $\forall x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z} : x + y = 1$.

- 2) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x-3|}{x^2-4} \leq 0\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(4x-x^2)|x|} > 0\}.$$

- i) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.
- ii) Determinate gli insiemi $A \cup B$ e $B \setminus A$.
- iii) Dite se A e B sono insiemi limitati.
- iv) Determinate, se esistono, il massimo e il minimo di A . A è un intervallo?
- v) Rappresentate graficamente l'insieme $A \times B$.

3) Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{se } x \leq -1 \\ 2x & \text{se } -1 < x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{se } x > 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g .
 - ii) Determinate, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
 - iii) Calcolate, se esistono, $(f \circ g)(5)$, $(fg)(0)$, $(\frac{f}{g})(1)$ e $(\frac{g}{f})(1)$.
 - iv) Rappresentate graficamente, nel loro insieme di definizione, le funzioni $x \mapsto |f(x) - 2|$ e $x \mapsto g(x+1)$.
-

4) i) Risolvete in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

$$\frac{e^{|x^2-1|}}{e^3} < e^{-1}; \quad \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3x}{x^2-4}\right) \geq 0.$$

- ii) Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = 4 - x^2$ e $g(x) = |x| - 2$. Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e dal grafico di g .
-

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Calcolate $\int_0^1 (f(x) + 1) dx$.
 - iii) Determinate, se esistono, le equazioni di tutte le rette orizzontali che non intersecano mai il grafico di f .
-

6) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano l'insieme delle coppie (x, y) soddisfacenti il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} -x^2 + 4y^2 \geq 4 \\ y + x^2 + 2 > 0 \\ 3y - x - 6 \leq 0. \end{cases}$$
