

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione e CdL in Filosofia
 CORSO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 Seconda Prova Intermedia - a.a. 2010-2011 - Rovereto, 22 dicembre 2010

FILA (A)

$$1) ||x^2-2|-1| > 0 \Leftrightarrow |x^2-2|-1 \neq 0 \Leftrightarrow |x^2-2| \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2-2 \neq -1 \text{ o } x^2-2 \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 \neq 1 \text{ o } x^2 \neq 3 \Rightarrow \underline{S = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}}$$

$$\frac{e^x e^{|x|}}{(\frac{1}{e})^{4x}} > e \Leftrightarrow e^x e^{|x|} e^{4x} > e \Leftrightarrow e^{x+|x|+4x} > e^1 \quad \square$$

$$\Leftrightarrow 5x + |x| > 1 \quad (e^x \text{ è crescente !!})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 6x > 1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ 4x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{6} \\ x < 0 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]\frac{1}{6}, +\infty[} \quad \square$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2+3x) > -1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{4}}(x^2+3x) > \log_{\frac{1}{4}} 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x > 0 & (\text{altrimenti non è definito } \log_{\frac{1}{4}}(x^2+3x)!!) \\ x^2+3x < 4 & (\log_{\frac{1}{4}} x \text{ è decrescente!}) \end{cases}$$

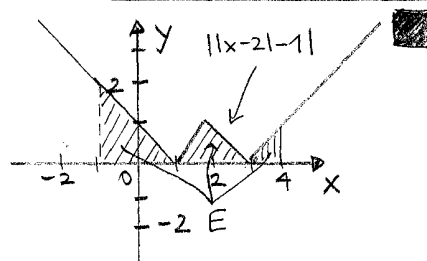
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \text{ o } x > 0 \\ x^2+3x-4 < 0 \end{cases}$$

$$x^2+3x-4 = (x+4)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \text{ o } x > 0 \\ -4 < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{S =]-4, -3[\cup]0, 1[} \quad \square$$

$$\begin{aligned} 2) i) \int_{-1}^4 ||x-2|-1| dx &= \text{area } E = \\ &= \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} \\ &= \underline{\underline{\frac{7}{2}}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{3x^4-5x}{x^3} dx &= \int_1^2 \left(3x - \frac{5}{x^2}\right) dx = \left[3\frac{x^2}{2} + \frac{5}{x}\right]_1^2 = \left(3 \cdot \frac{4}{2} + \frac{5}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + 5\right) = \\ &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^5 \left[\int_0^1 \left(n x + \frac{1}{x-n} \right) dx \right] &= \sum_{n=2}^5 \left[n \frac{x^2}{2} + \log|x-n| \right]_0^1 = \\ &= \sum_{n=2}^5 \left(\frac{n}{2} + \log|1-n| - \log|n| \right) = \\ &= (1 + \cancel{\log 1} - \cancel{\log 2}) + \left(\frac{3}{2} + \cancel{\log 2} - \cancel{\log 3} \right) + \left(\frac{4}{2} + \cancel{\log 3} - \cancel{\log 4} \right) \\ &\quad + \left(\frac{5}{2} + \cancel{\log 4} - \log 5 \right) = \underline{\underline{7 - \log 5}} \quad \square \end{aligned}$$

ii) $f(x) = (2x^2 + 2x + 1)e^{x^2+2x}$

a) $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, poiché $2x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $e^{x^2+2x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $F(x) = x e^{x^2+2x}$: F è derivabile su $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{x^2+2x} + x \cdot e^{x^2+2x} \cdot (2x+2) \\ &= (2x^2 + 2x + 1) e^{x^2+2x} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e quindi F è una primitiva di f su $\mathbb{R}$.

c) Essendo f una funzione positiva su $\mathbb{R}$, in particolare lo è su $[0, 1]$.

L'area della regione piana E delimitata dal grafico di f e dalle rette di eq. $x=0$, $x=1$ e $y=-1$ sarà data da

$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_0^1 (f(x) - (-1)) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 1 dx = F(1) - F(0) + [x]_0^1 \\ &= \underline{\underline{e^3 + 1}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3) Poniamo $f(x) = 2^x + 2x - \frac{1}{2}$. Allora $x_0 \in [-1, 0]$ è soluzione dell'eq.

$$2^x = -2x + \frac{1}{2} \quad \text{se e solo se } x_0 \text{ è uno zero di } f, \text{ ossia } f(x_0) = 0.$$

Ora f è continua su $[0, 1]$ e $f(1) = 2^{-1} - 2 - \frac{1}{2} = -2 < 0$; $f(0) = \frac{1}{2} > 0$.

Per il teorema di esistenza degli zeri si ha che $\exists x_0 \in]-1, 0[$ tale

che $f(x_0) = 0$. Essendo 2^x e $2x - \frac{1}{2}$ due funzioni crescenti, si ha che $f(x)$ è una funzione crescente e quindi x_0 è unico.

Usando il metodo della bisezione determiniamo un intervallo $] \tilde{a}, \tilde{b} [\subset]-1, 0[$

tale che $x_0 \in] \tilde{a}, \tilde{b} [$ e $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$.

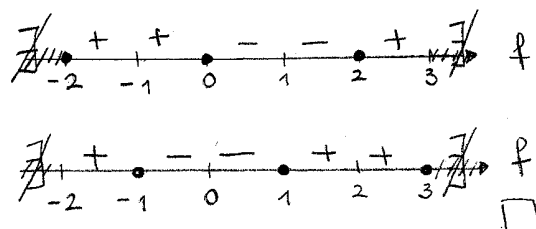
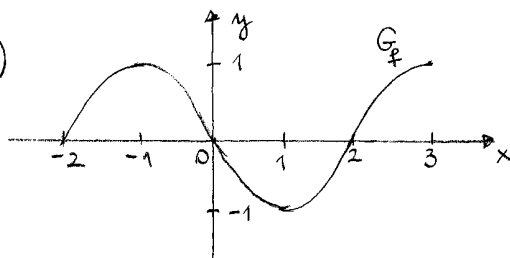
Consideriamo $a_1 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$ e abbiamo $f(-\frac{1}{2}) = 2^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{2} < 0$.

Poichè $f(0) > 0$ e $f(-\frac{1}{2}) < 0$, consideriamo $a_2 = \frac{-\frac{1}{2} + 0}{2} = -\frac{1}{4}$.

Abbiamo $f(-\frac{1}{4}) = 2^{-\frac{1}{4}} + 2(-\frac{1}{4}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - 1$. Essendo $\sqrt[4]{2} > 1$, segue che $\frac{1}{\sqrt[4]{2}} < 1$ e quindi $f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} - 1 < 0$.

Possiamo allora prendere $\underline{] \tilde{a}, \tilde{b} [=] -\frac{1}{4}, 0 [$ con $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$ e assumere che $x_0 \in] -\frac{1}{4}, 0 [$. ■

4) i)



ii) Il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che $F'(x) = f(x) \forall x \in [-2, 3]$ e quindi il segno di $F'(x)$ è dato dal segno di $f(x)$. Quindi risulta che F è crescente su $[-2, 0]$, è decrescente su $[0, 2]$, ed è crescente su $[2, 3]$. □

iii) $x = -2$ pt. di min. loc. per F ;

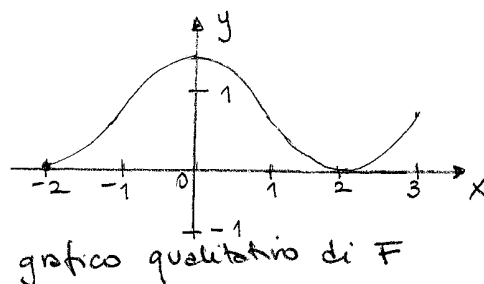
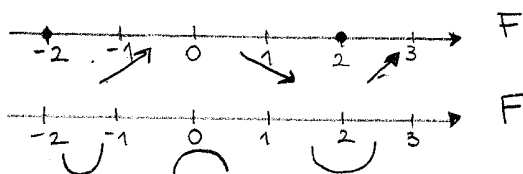
$x = 0$ pt. di max. loc. per F ;

$x = 2$ pt. di min. loc. per F ;

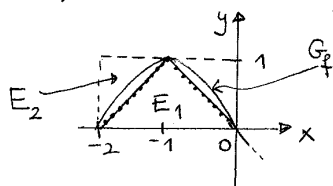
$x = 3$ pt. di max. loc. per F . □

iv) Essendo f derivabile su $[2, 3]$, dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che $F''(x) = f'(x) \forall x \in [-2, 3]$, e quindi il segno di $F''(x)$ è dato dal segno di $f'(x)$.

Risulta quindi che F è convessa in $[-2, -1]$, è concava in $[-1, 1]$ ed è convessa in $[1, 3]$. Riassumendo, da ii) e iv) abbiamo



v) Abbiamo $F(0) = \int_{-2}^0 f(t) dt = \text{area } E$, dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq f(x)\}$.



Sia E_1 il triangolo di vertici $(-2, 0)$, $(0, 0)$ e $(-1, 1)$

e sia E_2 il rettangolo di vertici $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(-2, 1)$.

Allora $\text{area } E_1 < \text{area } E < \text{area } E_2$ e quindi

facilmente si ottiene $1 < F(0) < 2$. ■

5) $f(x) = (1-x^3)^2$

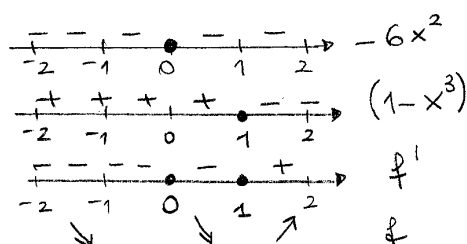
i) • $\text{dom } f = \mathbb{R}$

• segno di f $\begin{array}{ccccccc} + & + & + & + & + & + & + \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \end{array} x$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• f è continua su tutto $\mathbb{R}$, essendo composizione di fnt. continue su $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2(1-x^3)(-3x^2) = -6x^2(1-x^3)$



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1$ pt. critici

$x = 1$ pt. di min. loc. stretto per f

$f(1) = 0$.

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = -12x(1-x^3) - 6x^2(-3x^2)$

$$= -12x + 12x^4 + 18x^4 = 30x^4 - 12x$$

$$= 6x(5x^3 - 2)$$

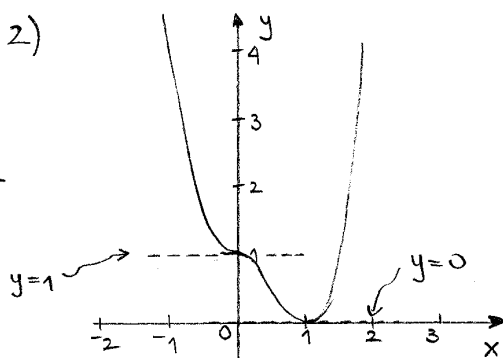
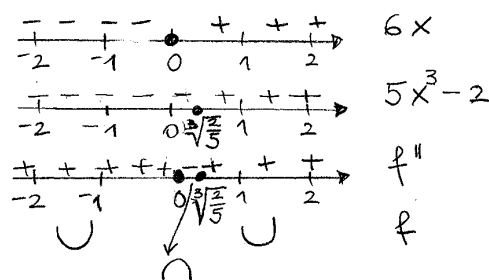
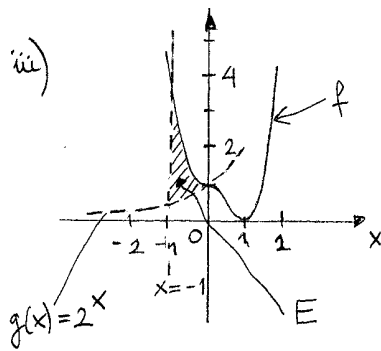


grafico qualitativo di f . □

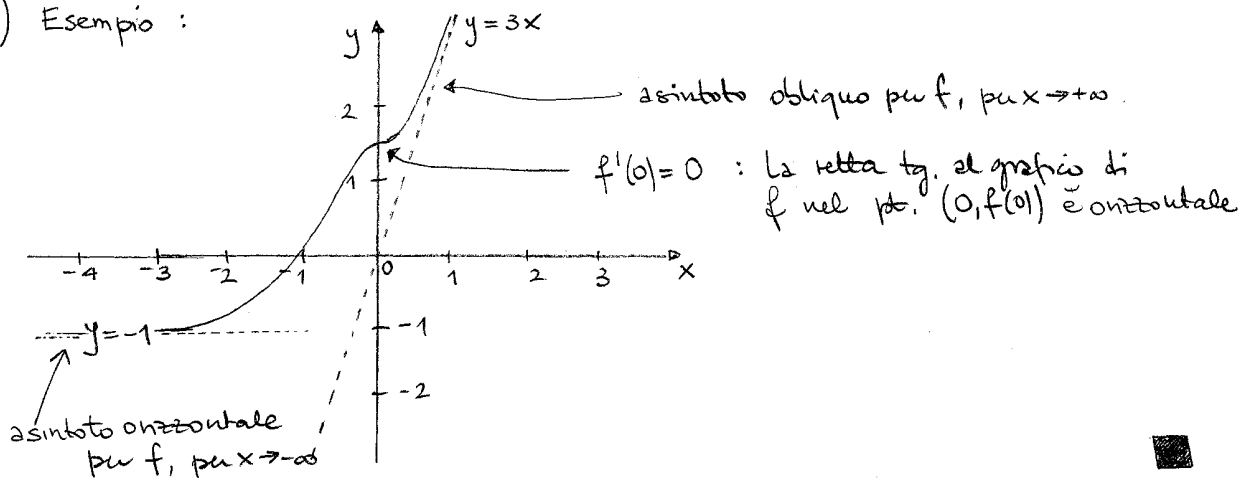
ii) $(0, 1)$: $y = 1$ eq. retta tg. (orizzontale) al grafico di f in $(0, 1)$

$(1, 0)$: $y = 0$ eq. retta tg. (orizzontale) al grafico di f in $(1, 0)$. □



$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_{-1}^0 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-1}^0 [(1-x^2)^2 - 2^x] dx = \\ &= \int_{-1}^0 (1 - 2x^3 + x^4 - 2^x) dx = \left[x - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{2^x}{\log 2} \right]_{-1}^0 \\ &= \left(-\frac{1}{\log 2} \right) - \left(-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{2^{-1}}{\log 2} \right) \\ &= \frac{23}{14} - \frac{1}{2 \log 2} = \frac{23}{14} - \frac{1}{\log 4} \end{aligned}$$

6) Esempio :



FILA (B)

$$\begin{aligned} 1) |x^2 - 4| - 3 &\leq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4| - 3 = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 4| - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x^2 - 4| = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4 = -3 \text{ o } x^2 - 4 = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ o } x^2 = 7 \Rightarrow S = \{-\sqrt{7}, -1, 1, \sqrt{7}\}. \end{aligned}$$

$$\frac{2^x \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}}{2^{-3x}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^{-|x|} \cdot 2^{3x} > 2^{-1}$$

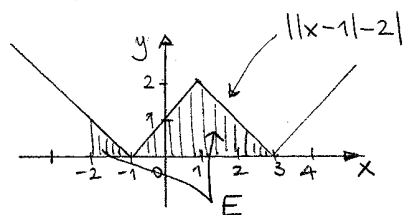
$$\Leftrightarrow 2^{4x - |x|} > 2^{-1} \Leftrightarrow 4x - |x| > -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x > -1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ 5x > -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x > -\frac{1}{3} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ x > -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow S =]-\frac{1}{5}, +\infty[.$$

$$\begin{aligned} \log_{1/9}(x^2+8x) &\geq -1 \Leftrightarrow \log_{1/9}(x^2+8x) \geq \log_{1/9} 9 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+8x > 0 \\ x^2+8x \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -8 \text{ o } x > 0 \\ x^2+8x-9 \leq 0 \end{cases} \\ \log_{1/9} x \bar{e} \text{ decrescente} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -8 \text{ o } x > 0 \\ -9 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad x^2+8x-9 = (x-1)(x+9) \\ &\Rightarrow \underline{\underline{S = [-9, -8[\cup]0, 1]}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) i) \int_{-2}^3 ||x-1|-2| dx &= \text{area } E = \\ &= \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} \\ &= \underline{\underline{\frac{9}{2}}}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \int_1^2 (e^{3x} - \sqrt{x+1}) dx &= \left[\frac{e^{3x}}{3} - \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} \right]_1^2 = \left(\frac{e^6}{3} - \frac{2}{3} \cdot 3^{3/2} \right) - \left(\frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3} [e^6 - e^3 - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{2}]} }}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^4 \left[\int_0^1 \left(\frac{x}{n} + \frac{1}{x+n} \right) dx \right] &= \sum_{n=1}^4 \left[\frac{x^2}{2n} + \log|x+n| \right]_0^1 = \sum_{n=1}^4 \left[\frac{1}{2n} + \log|1+n| - \log|n| \right] \\ &= \left(\frac{1}{2} + \log 2 - \log 1 \right) + \left(\frac{1}{4} + \log 3 - \log 2 \right) + \left(\frac{1}{6} + \log 4 - \log 3 \right) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{8} + \log 5 - \log 4 \right) = \underline{\underline{\frac{25}{24} + \log 5}}. \end{aligned}$$

$$ii) f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} + \log(1+x^2)$$

$$\begin{aligned} a) f(x) &\geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ essendo } 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ &\text{e } \log(1+x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

$$b) F(x) = x \log(1+x^2) : F \bar{e} \text{ derivabile in } \mathbb{R} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \log(1+x^2) + x \cdot \frac{2x}{1+x^2} = \log(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2} \\ &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

e quindi F è una primitiva di f in $\mathbb{R}$.

c) Essendo $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $= 0 \Leftrightarrow x = 0$, abbiamo che f è positiva in $]0, 1]$ e nulla in $x = 0$. L'area della regione

piana E delimitata dal grafico di f e dalle rette di eq. $x=0$, $x=1$

e $y=-1$ sarà data da

$$\text{area } E = \int_0^1 (f(x) - (-1)) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 1 dx = F(1) - F(0) + [x]_0^1 = \underline{\underline{\log 2 + 1.}}$$

3) Poniamo $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3x - \frac{1}{4}$. Allora $x_0 \in [0, 1]$ è soluzione dell'eq.

$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3x + \frac{1}{4}$ se e solo se x_0 è uno zero di f , ossia $f(x_0) = 0$. Ora f è continua

su $[0, 1]$ e $f(0) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$, $f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^1 - 3 - \frac{1}{4} = -\frac{35}{12} < 0$.

Per il teorema di esistenza degli zeri si ha che $\exists x_0 \in]0, 1[$ tale che $f(x_0) = 0$.

Essendo $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ e $-3x - \frac{1}{4}$ due funzioni decrescenti, si ha che $f(x)$ è una funzione decrescente e quindi x_0 è unico.

Usando il metodo della bisezione determiniamo un intervallo $]\tilde{a}, \tilde{b}[\subset]0, 1[$

tale che $x_0 \in]\tilde{a}, \tilde{b}[$ e $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$. Consideriamo $a_1 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ e

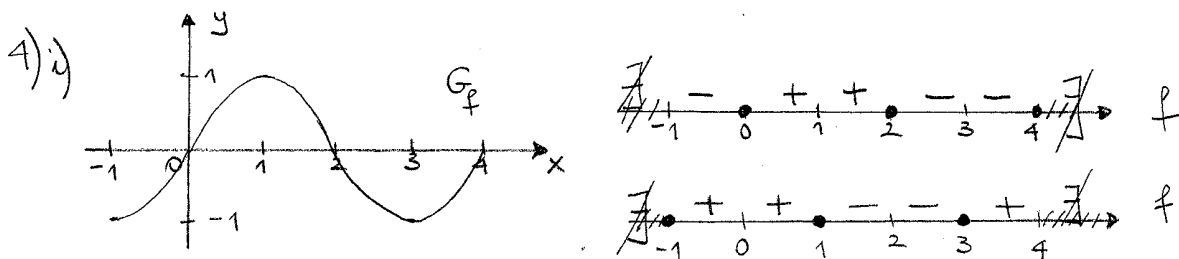
abbiamo $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} - 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{7}{4} < 0$. Poiché $f(0) > 0$ e

$f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$, consideriamo $a_2 = \frac{\frac{1}{2}+0}{2} = \frac{1}{4}$. Abbiamo $f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} - 3 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - 1$. Essendo $\sqrt[4]{3} > 1$, segue che $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} < 1$ e quindi

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} - 1 < 0$. Possiamo allora prendere $]\tilde{a}, \tilde{b}[=]0, \frac{1}{4}[$

con $\tilde{b} - \tilde{a} \leq \frac{1}{4}$ e assure che $x_0 \in]0, \frac{1}{4}[$.



ii) Il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che $F'(x) = f(x)$

$\forall x \in [-1, 4]$ e quindi il segno di $F'(x)$ è dato dal segno di $f(x)$.

Quindi risulta che F è decrescente su $[-1, 0]$, è crescente su

$[0, 2]$ ed è decrescente su $[2, 4]$.

iii) $x = -1$ pt. di max. loc. per F ;

$x = 0$ pt. di min. loc. per F ;

$x = 2$ pt. di max. loc. per F ;

$x = 4$ pt. di min. loc. per F . □

iv) Essendo f derivabile su $[-1, 4]$, dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che $F'(x) = f(x) \forall x \in [-1, 4]$ e quindi il segno di $F'(x)$ è dato dal segno di $f(x)$. Risulta quindi che F è concava in $[-1, 1]$, è concava in $[1, 3]$ ed è convessa in $[3, 4]$. Riassumendo, da ii) e iv) abbiamo

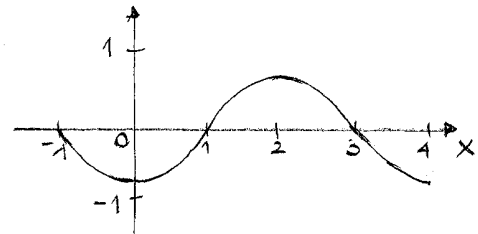
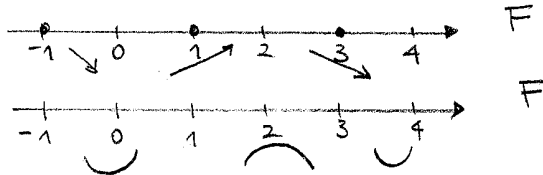
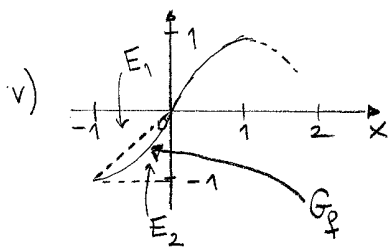


grafico qualitativo di F □



Abbiamo $F(0) = \int_{-1}^0 f(t) dt = -\text{area } E$, dove

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0, f(x) \leq y \leq 0\}.$$

Sia E_1 il triangolo di vertici $(-1, 0)$, $(-1, -1)$ e $(0, 0)$

e sia E_2 il quadrato di vertici $(-1, 0)$, $(-1, -1)$, $(0, -1)$ e $(0, 0)$.

Allora $\text{area } E_1 < \text{area } E < \text{area } E_2$ e quindi facilmente

si ottiene $-1 < F(0) < -\frac{1}{2}$. ■

5) i) $f(x) = -(1-x^3)^2$. Questa funzione coincide con la funzione studiata in Fila (A), Es. 5, cambiata di segno. Quindi si ha

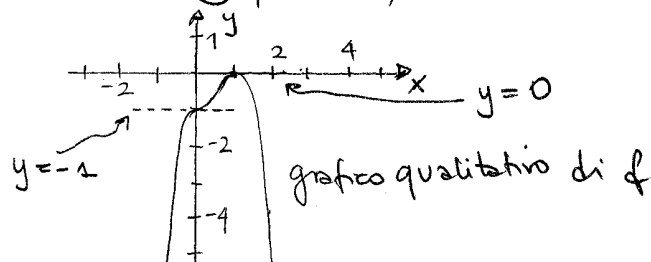
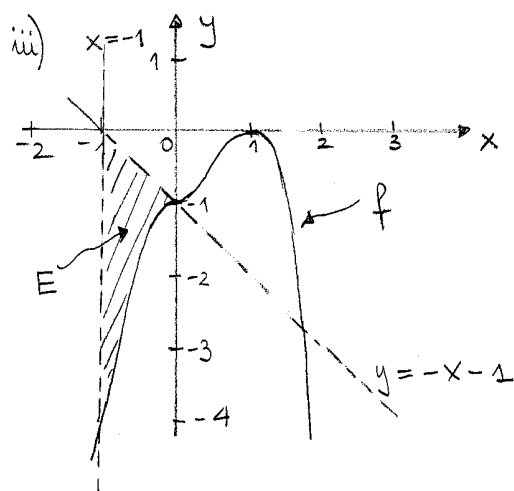


grafico qualitativo di f □

- ii) $(0, -1)$: $y = -1$ eq. retta tg. (orizzontale) al grafico di f in $(0, -1)$
 $(1, 0)$: $y = 0$ eq. retta tg. (orizzontale) al grafico di f in $(1, 0)$.

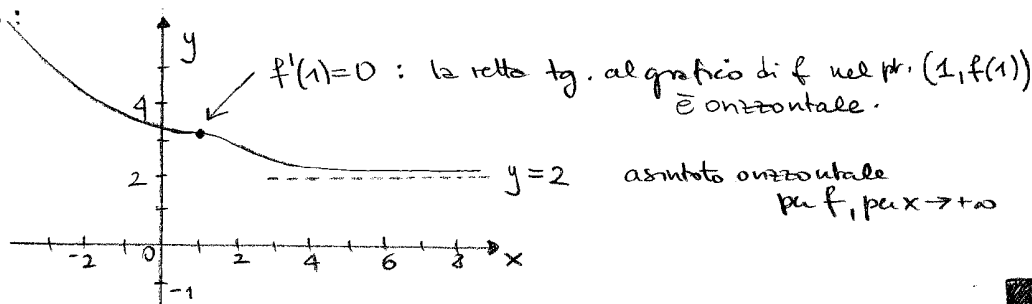
□



$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_{-1}^0 (-x - 1 + (1 - x^3)^2) dx = \\ &= \int_{-1}^0 (-x - 1 + 1 - 2x^3 + x^6) dx = \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} \right]_{-1}^0 = \\ &= -\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{7} \right) = \underline{\underline{\frac{8}{7}}} \end{aligned}$$

■

6) Esempio:



■

FILA (C)

$$\begin{aligned} 1) ||x^2 - 2| - 1| &\leq 0 \Leftrightarrow ||x^2 - 2| - 1| = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 2| - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x^2 - 2| = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2 = -1 \text{ o } x^2 - 2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ o } x^2 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{S = \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\}}}} \end{aligned}$$

□

$$\frac{3^x \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}}{3^{-3x}} \leq \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3^x \cdot 3^{-|x|} \cdot 3^{3x} \leq 3^{-1}$$

$$\Leftrightarrow 3^{4x - |x|} \leq 3^{-1}$$

3^x è crescente !!

$$\Leftrightarrow 4x - |x| \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x - x \leq -1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ 4x - (-x) \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x \leq -1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ 5x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, -\frac{1}{5}]}}$$

□

$$\log_{1/4}(x^2-3x) \geq -1 \Leftrightarrow \log_{1/4}(x^2-3x) \geq \log_{1/4} 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x > 0 \\ x^2-3x \leq 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{altrimenti: non \u00e8 definito } \log_{1/4}(x^2-3x)! \\ \log_{1/4} x \text{ \u00e8 decrescente!!} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ o } x > 3 \\ x^2-3x-4 \leq 0 \end{cases}$$

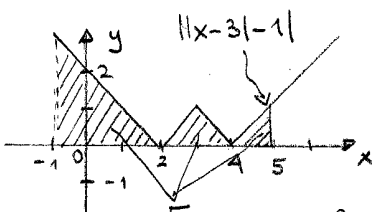
$$x^2-3x-4 = (x-4)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ o } x > 3 \\ -1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S = [-1, 0] \cup [3, 4]$$

$$2) i) \int_{-1}^5 ||x-3|-1| dx = \text{area } E =$$

$$= \frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} = 6$$



$$\int_0^5 (\sqrt{x+4} - e^{-x}) dx = \left[\frac{(x+4)^{3/2}}{3/2} + e^{-x} \right]_0^5 = \left(\frac{2}{3} \cdot 9^{3/2} + e^{-5} \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 4^{3/2} + 1 \right)$$

$$= 27 + \frac{1}{e^5} - \frac{16}{3} - 1 = \frac{35}{3} + \frac{1}{e^5}$$

$$\sum_{n=1}^4 \left[\int_0^2 \left(\frac{1}{x+n} - nx \right) dx \right] = \sum_{n=1}^4 \left[\log|x+n| - \frac{nx^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^4 \left[(\log|2+n| - 2n) - \log|n| \right] =$$

$$= (\log 3 - \log 1 - 2) + (\log 4 - \log 2 - 4) + (\log 5 - \log 3 - 6) + (\log 6 - \log 4 - 8) = -20 + \log\left(\frac{5 \cdot 6}{2}\right) = -20 + \log 15.$$

$$ii) f(x) = \frac{2x^2}{3+x^2} + \log(3+x^2): \quad a) \quad \frac{2x^2}{3+x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \frac{2x^2}{3+x^2} = 0 \Leftrightarrow x=0.$$

$$\log(3+x^2) > 0 \quad \text{poich\u00e9 } 3+x^2 > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

quindi $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $F(x) = x \log(3+x^2)$: F \u00e8 derivabile in $\mathbb{R}$ e

$$F'(x) = \log(3+x^2) + x \cdot \frac{2x}{3+x^2} = \log(3+x^2) + \frac{2x^2}{3+x^2} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e quindi F \u00e8 una primitiva di f in $\mathbb{R}$.

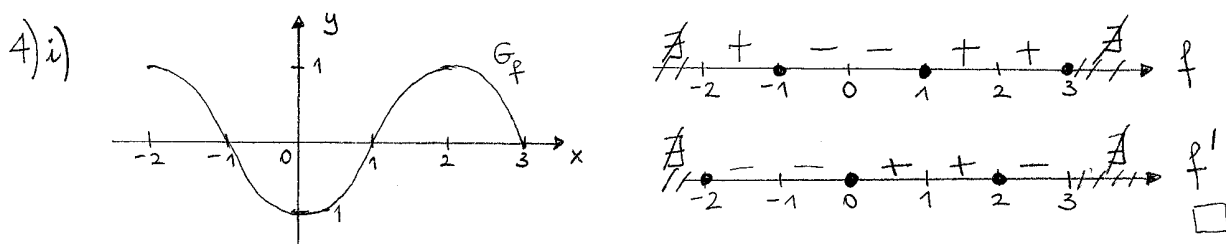
c) Essendo $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, l'area della regione piana E delimitata dal grafico di f e dalle rette di eq. $x=0$, $x=1$ e $y=-1$ \u00e8 data

-11-

$$\text{da } \text{area } E = \int_0^1 (f(x) - (-1)) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 1 dx = F(1) - F(0) + [x]_0^1 =$$

$$= \log 4 + 1.$$

3) Poniamo $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2x - \frac{1}{2}$. Procedendo analog. all'esercizio 3, FILA (B), si prova che $] \tilde{a}, \tilde{b} [=]0, \frac{1}{2}[$ può essere preso come intervallo contenente l'unico zero della funzione f , ossia l'unica soluzione dell'eq. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2x + \frac{1}{2}$, in $[0, 1]$.

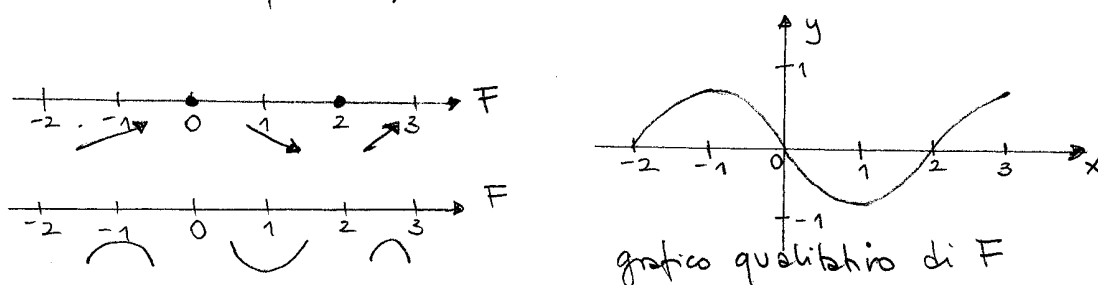


ii) Il teorema fondamentale del calcolo integrale asserisce che $F'(x) = f(x) \forall x \in [-2, 3]$ e quindi il segno di $F'(x)$ è dato dal segno di $f(x)$. Quindi risulta che F è crescente su $[-2, -1]$, è decrescente su $[-1, 1]$ ed è crescente su $[1, 3]$. □

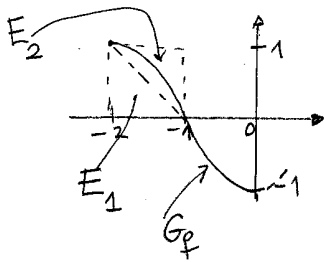
iii) $x = -2$ pt. di min. loc. per F ;
 $x = -1$ pt. di max. loc. per F ;
 $x = 1$ pt. di min. loc. per F ;
 $x = 3$ pt. di max. loc. per F . □

iv) Essendo f derivabile su $[-2, 3]$, dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che $F''(x) = f'(x) \forall x \in [-2, 3]$, e quindi il segno di $F''(x)$ è dato dal segno di $f'(x)$. Risulta quindi che F è concava in $[-2, 0]$, convessa in $[0, 2]$ e concava in $[2, 3]$.

Riassumendo, da ii) e iv) abbiamo



v) Abbiamo $F(-1) = \int_{-2}^{-1} f(t) dt = \text{area } E$, dove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq -1, 0 \leq y \leq f(x)\}$.



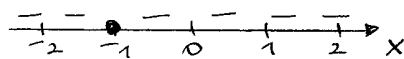
Sia E_1 il triangolo di vertici $(-2,0)$, $(-1,0)$ e $(-2,1)$ e sia E_2 il quadrato di vertici $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$ e $(-2,1)$. Allora $\text{area } E_1 < \text{area } E < \text{area } E_2$

quindi facilmente si ottiene $\frac{1}{2} < F(-1) < 1$. ■

5) $f(x) = -(x^3 + 1)^2$.

i) • $\text{dom } f = \mathbb{R}$

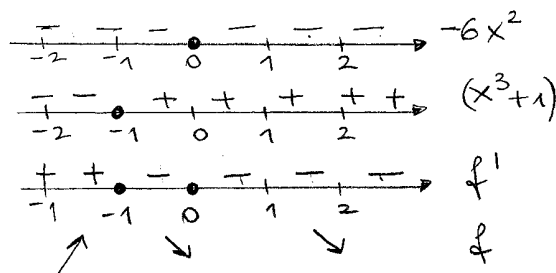
• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

• f è continua su tutto $\mathbb{R}$, essendo composizione di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = -2(x^3 + 1)(3x^2) = -6x^2(x^3 + 1)$



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = -1$ pt. critici

$x = -1$ pt. di massimo loc. stretto per f

$f(-1) = 0$.

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = -12x(x^3 + 1) - 6x^2 \cdot (3x^2)$

$= -12x^4 - 12x - 18x^4 = -30x^4 - 12x$

$= -6x(5x^3 + 2)$

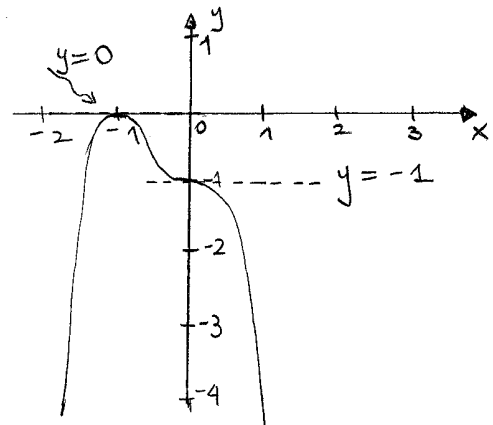
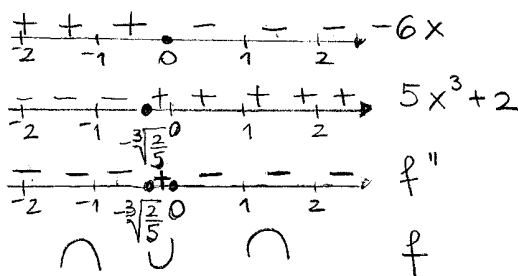
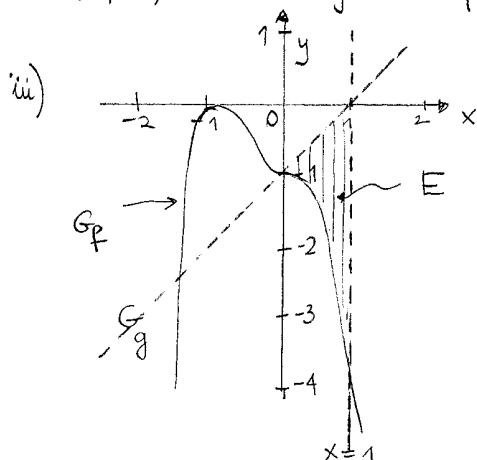


grafico qualitativo di f



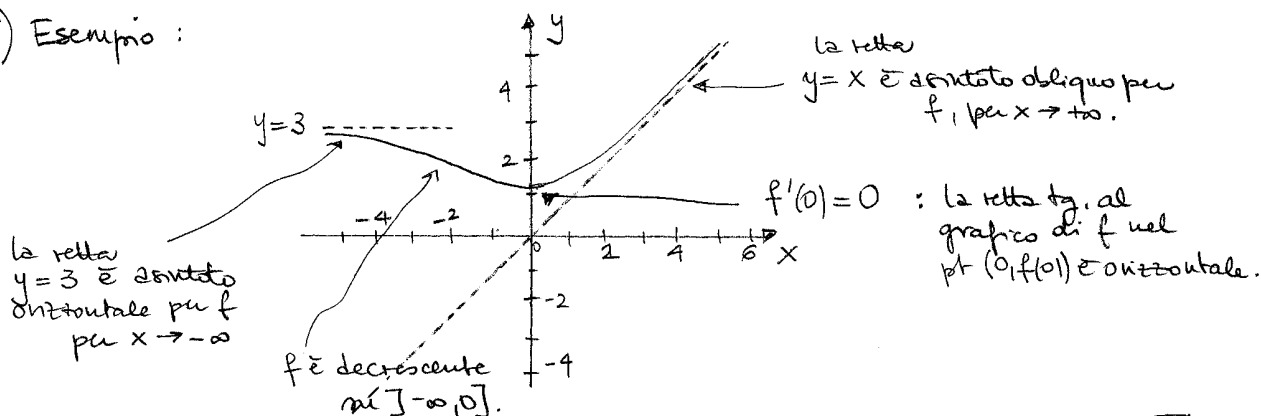
ii) $(-1, 0)$: $y=0$ eq. retta tg. (orizzontale) al grafico di f in $(-1, 0)$

$(0, -1)$: $y=-1$ eq. retta tg. (orizzontale) al grafico di f in $(0, -1)$.



$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_0^1 (x-1 + (x^3+1)^2) dx = \\ &= \int_0^1 (x-1 + x^6 + 2x^3 + 1) dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{8}{7}. \end{aligned}$$

6) Esempio :



FILA (D)

$$1) ||x^2-4|-3| > 0 \Leftrightarrow |x^2-4|-3 \neq 0 \Leftrightarrow |x^2-4| \neq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2-4 \neq -3 \text{ o } x^2-4 \neq 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 \neq 1 \text{ o } x^2 \neq 7 \Rightarrow \underline{S = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{7}, -1, 1, \sqrt{7}\}}.$$

$$\frac{e^{|x|} \left(\frac{1}{e}\right)^x}{e^{2x}} \leq e$$

$$\Leftrightarrow e^{|x|} e^{-x} e^{-2x} \leq e \Leftrightarrow e^{|x|-3x} \leq e^1 \quad \square$$

$$\Leftrightarrow |x|-3x \leq 1 \quad (e^x \text{ è crescente!})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -2x \leq 1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ -4x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ o } \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \underline{S = [-\frac{1}{4}, +\infty[}.$$

$$\begin{aligned} \log_{1/9}(x^2 - 8x) > -1 &\Leftrightarrow \log_{1/9}(x^2 - 8x) > \log_{1/9} 9 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 8x > 9 & (\text{altrimenti non è definito } \log_{1/9}(x^2 - 8x)) \\ x^2 - 8x < 9 & (\log_{1/9} x \text{ è decrescente!}) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ o } x > 8 \\ x^2 - 8x - 9 < 0 \end{cases} & x^2 - 8x - 9 = (x-9)(x+1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \text{ o } x > 8 \\ -1 < x < 9 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]-1, 0[\cup]8, 9[.}} \end{aligned}$$

$$2) i) \int_{-1}^4 ||x-2| - 1| dx = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}; \quad \int_1^3 \frac{3x^4 - 5x}{x^3} dx = \underline{\underline{2}};$$

$$\sum_{n=2}^5 \left[\int_0^1 \left(nx + \frac{1}{x-n} \right) dx \right] = \underline{\underline{7 - \log 5}} \quad (\text{Fila (A), Es. 2 i)}) \quad \square$$

$$ii) f(x) = (3x^2 + 2x + 3)e^{3x+1}$$

$$a) f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ poiché } 3x^2 + 2x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } e^{3x+1} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$b) F(x) = (x^2 + 1)e^{3x+1}; \quad F \text{ è derivabile su } \mathbb{R} \text{ e}$$

$$F'(x) = 2xe^{3x+1} + (x^2 + 1)e^{3x+1} \cdot 3$$

$$= (3x^2 + 2x + 3)e^{3x+1} = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e quindi F è una primitiva di f su $\mathbb{R}$.

c) Essendo f una funzione positiva su $\mathbb{R}$, in particolare lo è su $[0, 1]$.

L'area della regione piana E delimitata dal grafico di f e dalle

rette di eq. $x=0$, $x=1$ e $y=-1$ sarà data da

$$\text{area } E = \int_0^1 (f(x) - (-1)) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 1 dx = F(1) - F(0) + [x]_0^1$$

$$= \underline{\underline{2e^4 - e + 1.}} \quad \blacksquare$$

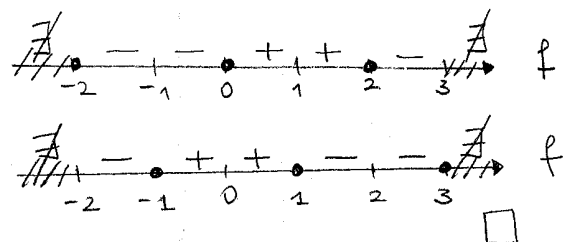
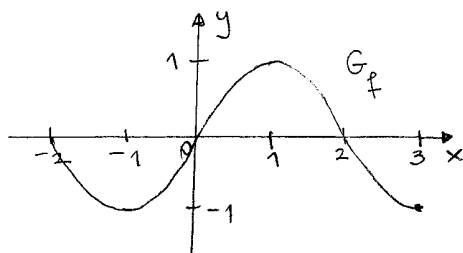
3) Poniamo $f(x) = 3^x + 2x - \frac{1}{2}$. Procedendo analog. all'esercizio 3, Fila (A),

si prova che $]\tilde{a}, \tilde{b}[=]-\frac{1}{4}, 0[$ può essere preso come intervallo

contenente l'unico zero della funzione f , ossia l'unica soluzione

dell'eq. $3^x = -2x + \frac{1}{2}$ su $[-1, 0]$. \blacksquare

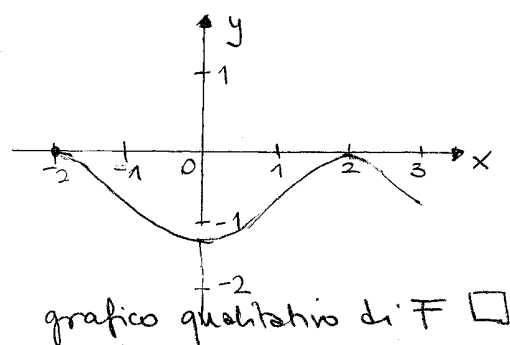
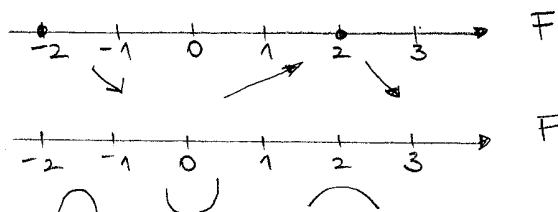
4) i)



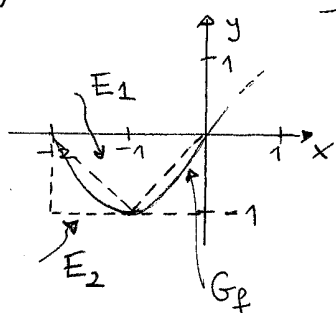
ii) Il teorema fondamentale del calcolo integrale assicura che $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [-2, 3]$ e quindi il segno di $F'(x)$ è dato dal segno di $f(x)$. Quindi F risulta decrescente in $[-2, 0]$, crescente in $[0, 2]$ e decrescente in $[2, 3]$. $\square$

iii) $x = -2$ pt. di max. loc. per F ;
 $x = 0$ pt. di min. loc. per F ;
 $x = 2$ pt. di max. loc. per F ;
 $x = 3$ pt. di min. loc. per F . $\square$

iv) Essendo f derivabile in $[-2, 3]$, dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che $F''(x) = f'(x)$ $\forall x \in [-2, 3]$, e quindi il segno di $F''(x)$ è dato dal segno di $f'(x)$. Risulta quindi che F è concava in $[-2, -1]$, convessa in $[-1, 1]$ e concava in $[1, 3]$. Riassumendo, da ii) e iv) abbiamo



v) Abbiamo $F(0) = \int_{-2}^0 f(t) dt = -\text{area } E$, dove $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, f(x) \leq y \leq 0\}$.



Sia E_1 il triangolo di vertici $(-2, 0)$, $(-1, -1)$ e $(0, 0)$ e sia E_2 il rettangolo di vertici $(-2, 0)$, $(-2, -1)$, $(-1, -1)$ e $(-1, 0)$.

$(0, -1)$ e $(0, 0)$. Poiché $\text{area } E_1 < \text{area } E < \text{area } E_2$ si ha
 $-\text{area } E_2 < F(0) < -\text{area } E_1$, e quindi $-2 < F(0) < -1$.

5) i) $f(x) = (x^3 + 1)^2$. Questa funzione coincide con la funzione studiata
 in FILA (C), Es. 5, cambiata di segno. Quindi si ha il seguente

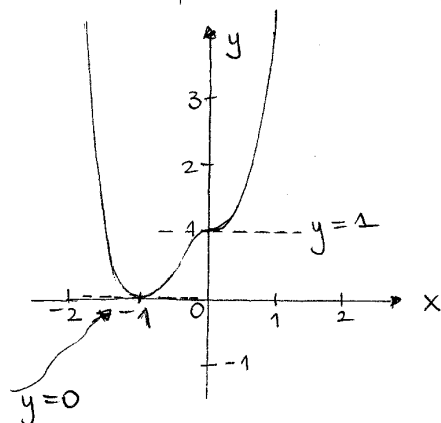
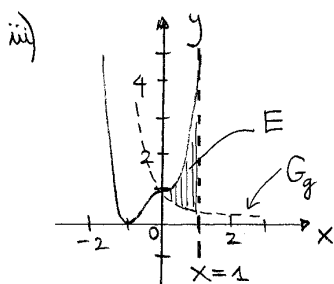


grafico qualitativo di f

- ii) $(-1, 0)$: $y=0$ eq. retta tg. (orizzontale) al grafico di f in $(-1, 0)$
 $(0, 1)$: $y=1$ eq. retta tg. (orizzontale) al grafico di f in $(0, 1)$.



$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \\ &= \int_0^1 [(x^3 + 1)^2 - e^{-x}] dx = \int_0^1 (x^6 + 2x^3 + 1 - e^{-x}) dx \\ &= \left[\frac{x^7}{7} + 2\frac{x^4}{4} + x + e^{-x} \right]_0^1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{e} - 1 \\ &= \frac{9}{14} + \frac{1}{e} \end{aligned}$$

6) Esempio:

