

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2010-2011 - Rovereto, 10 gennaio 2011

FILA (A)

$$\begin{aligned} 1) \quad 3|x| + x^2 < 4 &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ -4 < x < 1 \end{cases} \circ \begin{cases} x < 0 \\ -1 < x < 4 \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]-1, 1[}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2^x 2^{1x+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}} \geq 1 &\Leftrightarrow 2^x 2^{1x+1} 2^{3x} \geq 2^0 \Leftrightarrow 2^{4x+1x+1} \geq 2^0 \\ &\Leftrightarrow 4x + 1x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 5x+1 \geq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x+1 < 0 \\ 3x-1 \geq 0 \end{cases} \\ &\quad 2^x \text{ è crescente} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \geq -\frac{1}{5} \end{cases} \circ \begin{cases} x < -1 \\ x \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{S = \left[-\frac{1}{5}, +\infty\right)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_3(|x|-2) + \log_3(3+x) &\leq \log_3 6 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |x|-2 > 0 \\ 3+x > 0 \\ \log_3(|x|-2)(3+x) \leq \log_3 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 2 \\ x > -3 \\ (|x|-2)(3+x) \leq 6 \end{cases} \\ &\quad \uparrow \log_3 x \nearrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -3 \\ (-x-2)(3+x) \leq 6 \end{cases} \circ \begin{cases} x > 2 \\ x > -3 \\ (x-2)(3+x) \leq 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -3 \\ x^2 + 5x + 12 \geq 0 \end{cases} \circ \begin{cases} x > 2 \\ x > -3 \\ x^2 + x - 12 \leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -3 \\ \mathbb{R} \end{cases} \circ \begin{cases} x > 2 \\ x > -3 \\ -4 \leq x \leq 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2 \\ 2 < x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]-3, -2[\cup]2, 3]}. \end{aligned}$$

$$2) i) \int_{-3}^0 |x^2 - 1| dx = \int_{-3}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx =$$

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-3}^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = \left[\left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - (-9 + 3) \right] + \left[-(-1 + \frac{1}{3}) \right]$$

$$= \frac{4}{3} + 6 = \frac{22}{3}.$$

$$\int_0^1 (\sqrt{2x} + 2^x) dx = \int_0^1 (\sqrt{2} \sqrt{x} + 2^x) dx = \left[\sqrt{2} \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{2^x}{\log 2} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{\log 2} - \frac{1}{\log 2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{\log 2}.$$

$$\int_1^2 \left(\frac{3x^3}{x^4 + 1} + x^{-1} + 1 \right) dx = \frac{3}{4} \int_1^2 \frac{4x^3}{x^4 + 1} dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) dx =$$

$$= \frac{3}{4} \left[\log |x^4 + 1| \right]_1^2 + \left[\log |x| + x \right]_1^2 = \frac{3}{4} (\log 17 - \log 2) +$$

$$+ (\log 2 + 2 - \log 1 - 1) = \frac{3}{4} \log 17 + \frac{1}{4} \log 2 + 1.$$

$$ii) \sum_{n=1}^{17} (-1)^n \frac{2n}{a^{n+1}}.$$

$$iii) \sum_{n=0}^5 \frac{f(n)}{n!} = \frac{0}{1} + \frac{1}{1} + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} + \frac{25}{120} = 3 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{24}$$

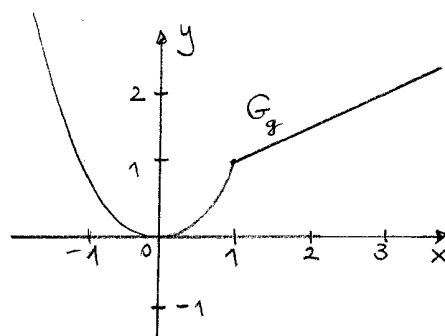
$$f(x) = x^2$$

$$= \frac{129}{24} \quad \left(= \frac{43}{8} \right)$$

$$3) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

i)



ii) g è continua in $x = 1$, poiché

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right).$$

$$iii) \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \underline{2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1+h}{2} + \frac{1}{2} \right) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{h}{2}}{h} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$$

Essendo $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$, si ha che g non è derivabile in $x=1$. ■

4) i) $x = -1$: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 \neq f(-1)$ ($\neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1$)
 $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$, mentre $f(1) = 1$ ($\neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$). □

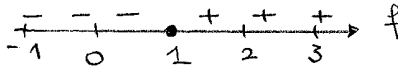
ii) su $]-\infty, -1[$ f è crescente;
 su $]-1, 1[$ f è crescente;
 su $]1, +\infty[$ f è decrescente. □

iii) $y = 0$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;
 $y = -\frac{1}{2}x$ è asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow +\infty$;
 $x = 1$ è asintoto verticale per f . □

iv) f non soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[-1, 0]$, non essendo continua in $x = -1$ (ricordo che il teorema ci dà solo condizioni sufficienti, ma non condizioni necessarie per l'esistenza degli zeri) e in più $f(-1) > 0$, $f(0) > 0$. ■

5) $f(x) = (x-1)e^{2x}$

i) • $\text{dom} f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

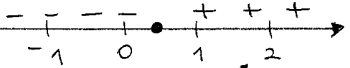
• segno  f ($e^{2x} > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)}{e^{-2x}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. $y=0$ è asintoto orizz. per f , per $x \rightarrow -\infty$.

• f è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo prodotto di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

• $\text{dom} f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = e^{2x} + (x-1)e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} [1 + 2x - 2] = e^{2x} (2x - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ pt. critico per f

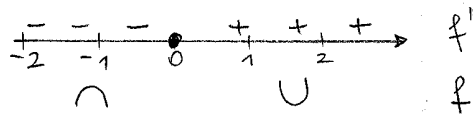
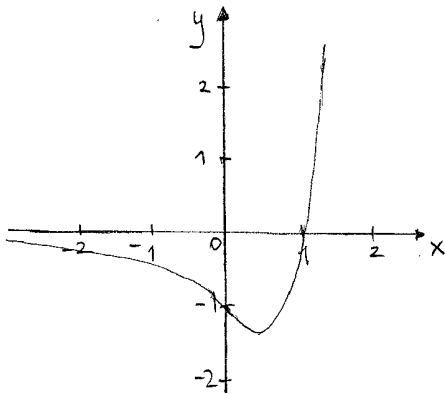
 $f'(x)$

$x = \frac{1}{2}$ pt. di min. loc. stretto per f , $f(\frac{1}{2}) = -\frac{e}{2} \approx -1.4$

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$

$$f''(x) = 2e^{2x}(2x-1) + e^{2x} \cdot 2$$

$$= e^{2x} [4x - \cancel{2} + \cancel{2}] = 4xe^{2x}$$

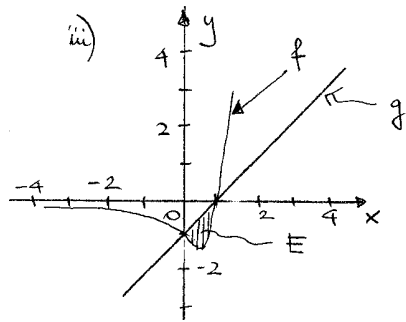


$x=0$ pt. di flesso.

grafico qualitativo della f



ii) $F(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2x}$ è una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ e $F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2x} \cdot 2$
 $= e^{2x} \left(\frac{1}{2} + x - \frac{3}{2}\right) = e^{2x}(x-1) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Quindi F è una
 primitiva di f su $\mathbb{R}$.



$$\text{area } E = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 (x-1) dx - \int_0^1 f(x) dx$$

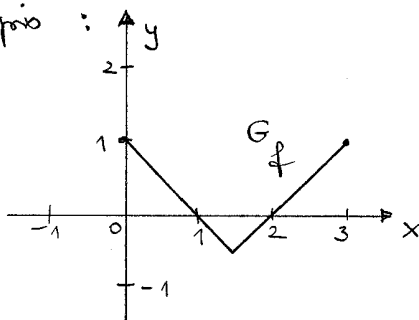
$$= \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 - [F(1) - F(0)] =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 1 \right) - \left(-\frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4}}}$$



6) esempio :



$$f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x-2 & \text{se } \frac{3}{2} \leq x \leq 3. \end{cases}$$



FILA (B)

$$1) 3|x| + x^2 \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 3x - 4 \geq 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -4 \quad \vee \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}}$$

□

$$\frac{2^x 2^{|x+1|}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}} < 1 \Leftrightarrow 2^x 2^{|x+1|} 2^{3x} < 2^0 \Leftrightarrow 2^{4x+|x+1|} < 2^0$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} 4x+|x+1| < 0 \\ 2^x \text{ \textit{é} croissante} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 5x+1 < 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x+1 < 0 \\ 3x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x < -\frac{1}{5} \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x < -1 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]-\infty, -\frac{1}{5}[}}$$

□

$$\log_4(|x|-2) + \log_4(3+x) > \log_4 6$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x|-2 > 0 \\ 3+x > 0 \\ \log_4(|x|-2)(3+x) > \log_4 6 \end{cases} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \log_4 x \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 2 \\ x > -3 \\ (|x|-2)(3+x) > 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -3 \\ x^2 + 5x + 12 < 0 \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 2 \\ x > -3 \\ x^2 + x - 12 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > -3 \\ \emptyset \end{cases} \quad \circ \quad \begin{cases} x > 2 \\ x > -3 \\ x < -4 \quad \vee \quad x > 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{S =]3, +\infty[}}$$

■

$$2) i) \int_0^4 |x^2-1| dx = \int_0^1 (1-x^2) dx + \int_1^4 (x^2-1) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^4$$

$$x^2-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 1$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left[\left(\frac{64}{3} - 4\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] = \frac{4}{3} + \frac{52}{3} = \underline{\underline{\frac{56}{3}}}$$

□

$$\int_0^1 (\sqrt{5x} + 3^x) dx = \int_0^1 (\sqrt{5} \sqrt{x} + 3^x) dx = \left[\sqrt{5} \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{3^x}{\log 3} \right]_0^1 = \frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{3}{\log 3} - \frac{1}{\log 3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{\log 3}}}$$

□

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{2x^2}{x^3+1} + x^{-2} + 1 \right) dx &= \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{3x^2}{x^3+1} dx + \int_1^2 (x^{-2} + 1) dx = \\ &= \frac{2}{3} \left[\log |x^3+1| \right]_1^2 + \left[-x^{-1} + x \right]_1^2 = \frac{2}{3} (\log 9 - \log 2) + \left[\left(-\frac{1}{2} + 2 \right) - \left(-1 + 1 \right) \right] \\ &= \frac{2}{3} \log \frac{9}{2} + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

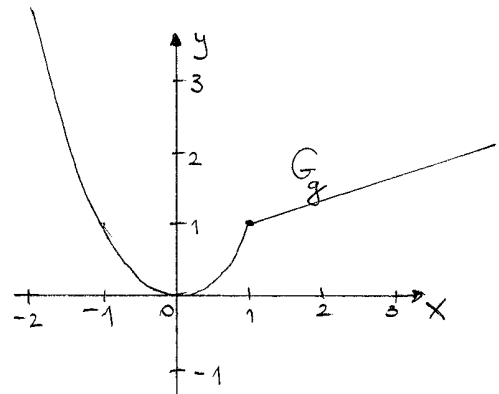
$$\text{ii) } \sum_{n=1}^{17} (-1)^{n+1} \frac{3n}{a^{n+1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \sum_{n=1}^5 n f\left(\frac{1}{n}\right) &= 1 + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} + \cancel{4} \cdot \frac{1}{\cancel{4}} + \cancel{5} \cdot \frac{1}{\cancel{5}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad f(x) = x^2 \\ &= \frac{137}{60}. \end{aligned}$$

$$3) g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x}{3} + \frac{2}{3} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

i)



ii) g è continua in $x=1$, poiché

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 = g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3} \right).$$

$$\text{iii) } \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \underline{\underline{2}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1+h}{3} + \frac{2}{3} \right) - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

Essendo $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h}$, si ha che g non è derivabile in $x=1$.

$$4) \text{ i) } x=0 : \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty, \text{ mentre } f(0) = 3 \quad (\neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1)$$

$$x=1 : \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\frac{1}{2} = f(1) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0.$$

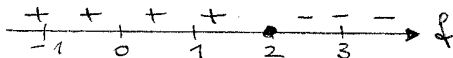
ii) su $]-\infty, -1]$ f è decrescente, su $[-1, 0[$ f è crescente,
su $[0, 1]$ f è decrescente, su $]1, +\infty[$ f è crescente. $\square$

- iii) $y = -2x$ è asintoto obliquo per f , per $x \rightarrow -\infty$;
 $y = 1$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$;
 $x = 0$ è asintoto verticale per f . □

iv) f non soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[0, 1]$,
 non essendo continua in $x = 0$. ■

5) $f(x) = (2-x)e^{2x}$

i) $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

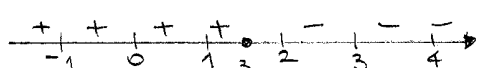
• segno  $(e^{2x} > 0 \forall x \in \mathbb{R})$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2-x)}{e^{-2x}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
 $y = 0$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$.

• f è continua su tutto $\mathbb{R}$ essendo prodotto di funzioni continue su $\mathbb{R}$.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = -e^{2x} + (2-x)e^{2x} \cdot 2 = e^{2x}(-1+4-2x) = e^{2x}(3-2x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ pt. critico per f

 $f'(x)$
 $\uparrow$ $\downarrow$ $f(x)$

$x = \frac{3}{2}$ pt. di max. loc. stretto per f , $f(\frac{3}{2}) = \frac{e^3}{2} \sim 10$

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = 2e^{2x}(3-2x) + e^{2x}(-2) = e^{2x}(6-4x-2) = 4e^{2x}(1-x)$

 $f''(x)$
 $\cup$ $\cap$ $f(x)$

$x = 1$ pt. di flesso.

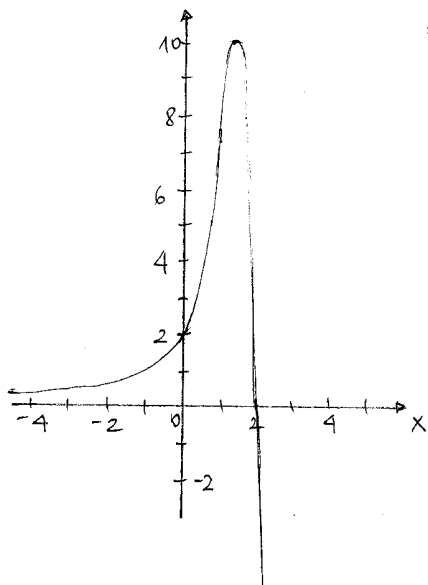


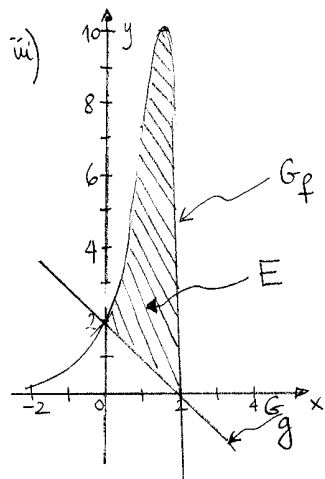
grafico qualitativo di f

□

ii) $F(x) = \left(\frac{5}{4} - \frac{x}{2}\right)e^{2x}$ è una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ e

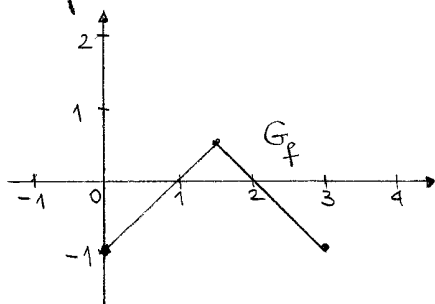
$$F'(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \left(\frac{5}{4} - \frac{x}{2}\right)e^{2x} \cdot 2 = e^{2x} \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{2} - x\right) = e^{2x}(2-x) = f(x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. Quindi F è una primitiva di f su $\mathbb{R}$. $\square$



$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 (-x+2) dx \\ &= F(2) - F(0) - \left[-\frac{x^2}{2} + 2x \right]_0^2 = \\ &= \left(\frac{1}{4}e^4 - \frac{5}{4} \right) - (-2+4) = \underline{\underline{\frac{e^4}{4} - \frac{13}{4}}} \end{aligned}$$

b) esempio:



$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ -x+2 & \text{se } \frac{3}{2} \leq x \leq 3. \end{cases}$$