

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 Corso di Laurea in Scienze Cognitive e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 Corso di Laurea in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - GL in Filosofia
 SECONDA PROVA INTERMEDIA DI ANALISI MATEMATICA (CON EL. DI ALGEBRA)
 a.a. 2010-2011 - Rovereto, 14 febbraio 2011

FILA (A)

• $\frac{|x|-3}{1-e^x} > 0$

$S =]-\infty, -3[\cup]0, 3[$

(vedi Esame Scritto
14/02/11, FilA (B), Es. 1 ii))
□

• $\sqrt{3-|x+1|} \leq 1 \iff 0 \leq 3-|x+1| \leq 1$

$S = [-4, -3] \cup [1, 2]$

(vedi Esame Scritto
14/02/11, FilA (B), Es. 1 ii))
□

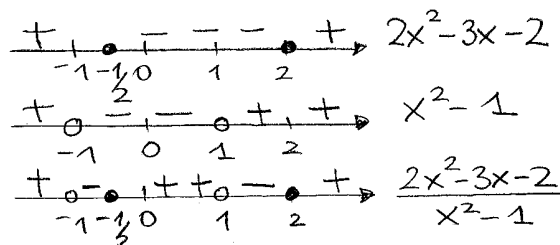
• $\log_2(3x) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) \leq 1 \iff \log_2(3x) - \log_2(x^2-1) \leq 1$

↑
cambio di base

$\iff \begin{cases} 3x > 0 \\ x^2-1 > 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{almeno uno non è definito} \\ \text{il } \log_2 x \end{array} \right.$
 $\log_2 \frac{3x}{x^2-1} \leq \log_2 2$

$\iff \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \text{ o } x > 1 \\ \frac{3x}{x^2-1} \leq 2 \end{cases} \quad (\log_2 x \nearrow)$

$\iff \begin{cases} x > 1 \\ \frac{3x-2x^2+2}{x^2-1} \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 1 \\ \frac{2x^2-3x-2}{x^2-1} \geq 0 \end{cases}$



$\iff \begin{cases} x > 1 \\ x \in]-\infty, -1[\cup]\frac{1}{2}, 1[\cup [2, +\infty[\end{cases}$

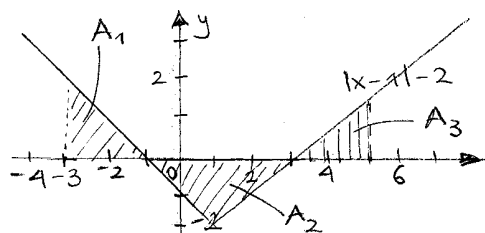
$\Rightarrow \underline{\underline{S = [2, +\infty[}}$



$$2) i) \int_{-3}^5 (|x-1|-2) dx =$$

$$\text{area } A_1 - \text{area } A_2 + \text{area } A_3 =$$

$$= \underline{\underline{0.}}$$



$$\int_1^2 (\sqrt[3]{x+1} + x^{-1}) dx = \int_1^2 \left[(x+1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x} \right] dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \log|x| \right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{4} \cdot 3^{\frac{4}{3}} + \log 2 \right) - \frac{3}{4} \cdot 2^{\frac{4}{3}} = \underline{\underline{\frac{3}{4} (3^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{4}{3}}) + \log 2.}}$$

$$\int_3^4 \left(\frac{x+2}{x^2-4} + x^3 + 3 \right) dx = \int_3^4 \left(\frac{x+2}{(x+2)(x-2)} + x^3 + 3 \right) dx = \left[\log|x-2| + \frac{x^4}{4} + 3x \right]_3^4 =$$

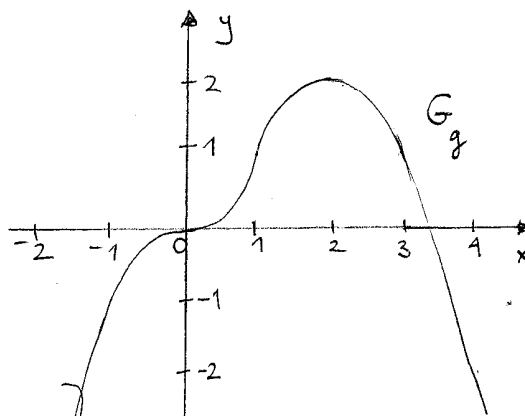
$$= \left(\log 2 + \frac{4^4}{4} + 12 \right) - \left(\frac{3^4}{4} + 9 \right) = \underline{\underline{\log 2 + \frac{187}{4}}}$$



ii) vedi Esame Scritto 14/02/2011, FILA (B), Es. 4).



$$3) i) g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \leq 1 \\ -(x-2)^2 + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



ii) g è continua poiché

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [-(x-2)^2 + 2] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1 = g(1).$$



$$iii) \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} = 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[-(1+h-2)^2 + 2 - 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{[-(h-1)^2 + 1]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (-h + 2) = 2.$$

Poiché i due limiti non coincidono, segue che g non è derivabile in $x=1$.



4) i) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \Rightarrow x = -1$ pt. di discontinuità

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow x = 0$ " □

ii) su $]-\infty, -2]$, f è decrescente;

$[-2, -1[$, f è crescente;

$[-1, 0[$, f è decrescente;

$[0, 1]$, f è decrescente;

$[1, +\infty[$, f è crescente. □

iii) $y = 1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;

$y = 2$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

$x = -1$ asintoto verticale per f . □

iv) f è continua su $[0, 2]$; quindi sono verificate le ipotesi del teorema di Weierstrass. Esistono massimo e minimo di f su $[0, 2]$ e si ha $\min_{[0, 2]} f = f(1) = -1$, $\max_{[0, 2]} f = f(0) = 1$. ■

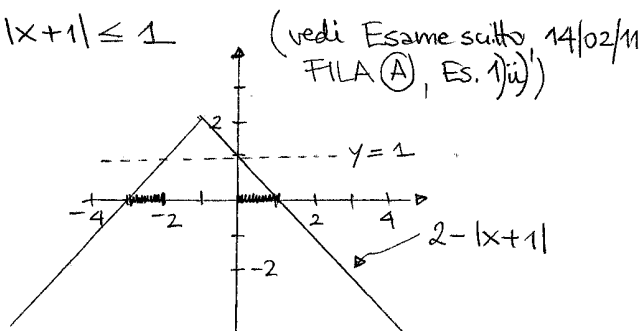
5) vedi Esame Scritto 14/02/2011, FILA (B), Es. 5. ■

6) $D_{35,8} = \frac{35!}{(35-8)!} = \frac{35!}{27!}$ ■

FILA (B)

1) $\sqrt{2 - |x+1|} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2 - |x+1| \leq 1$

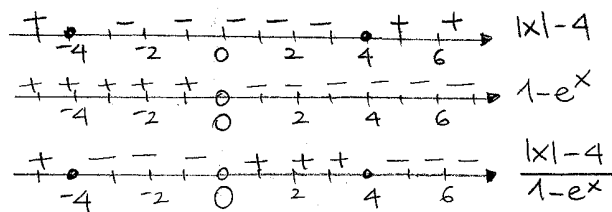
$S = [-3, -2] \cup [0, 1]$



□

$$\bullet \frac{|x|-4}{1-e^x} > 0$$

$$\underline{\underline{S =]-\infty, -4[\cup]0, 4[.}}$$



$$\bullet \log_2(3x) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) \geq 1 \Leftrightarrow \log_2(3x) - \log_2(x^2-1) \geq 1$$

↑
cambio di base

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x > 0 \\ x^2-1 > 0 \\ \log_2 \frac{3x}{x^2-1} \geq \log_2 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -1 \text{ o } x > 1 \\ \frac{3x}{x^2-1} \geq 2 \end{cases}$$

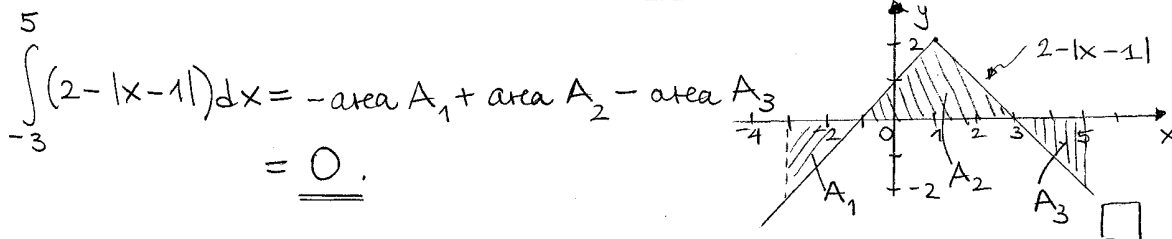
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{2x^2-3x-2}{x^2-1} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \in]-1, -\frac{1}{2}] \cup]1, 2] \end{cases}$$

(vedi FILA (A))
ES. 1

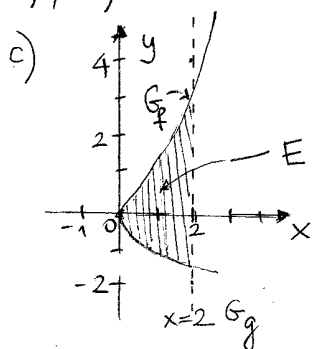
$$\Rightarrow \underline{\underline{S =]1, 2]}}$$

$$\begin{aligned} 2) i) \int_3^4 \left(\frac{x+2}{x^2-4} + x^4+2 \right) dx &= \int_3^4 \left(\frac{\cancel{x+2}}{(\cancel{x+2})(x-2)} + x^4+2 \right) dx = \\ &= \left[\log|x-2| + \frac{x^5}{5} + 2x \right]_3^4 = \left(\log 2 + \frac{4^5}{5} + 8 \right) - \left(\frac{3^5}{5} + 6 \right) \\ &= \underline{\underline{\log 2 + \frac{791}{5}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\sqrt[3]{x+2} + x^{-1} \right) dx &= \int_1^2 \left[(x+2)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x} \right] dx = \left[\frac{(x+2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + \log|x| \right]_1^2 = \\ &= \left(\frac{3}{4} \cdot 4^{\frac{4}{3}} + \log 2 \right) - \left(\frac{3}{4} \cdot 3^{\frac{4}{3}} \right) = \underline{\underline{\log 2 + \frac{3}{4} (4\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{3})}}. \end{aligned}$$



ii) a), b) vedi Esame Scritto, 14/02/11, FILA (A), Es. 4) i) ii).



$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_0^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^2 (2^x - 1 + \sqrt{x}) dx \\ &= \left[\frac{2^x}{\log 2} - x + \frac{x^{3/2}}{3/2} \right]_0^2 = \\ &= \left(\frac{4}{\log 2} - 2 + \frac{2}{3} \cdot 2^{3/2} \right) - \frac{1}{\log 2} \\ &= \underline{\underline{\frac{3}{\log 2} - 2 + \frac{4}{3} \sqrt{2}}} \end{aligned}$$

3) i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow x=0$ pt. di discontinuità
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 = f(2)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \Rightarrow x=2$ pt. di discontinuità.

ii) in $]-\infty, -1]$, f è crescente;
 $[-1, 0[$, f è decrescente;
 $[0, 1]$, f è decrescente;
 $[1, 2]$, f è crescente;
 $[2, +\infty[$, f è decrescente.

iii) $y = -1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$;
 $y = 1$ asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.
 $x = 0$ asintoto verticale per f .

iv) f è continua in $[0, 2]$; quindi sono verificate le ipotesi del teorema di Weierstrass. Esistono massimo e minimo di f in $[0, 2]$ e si ha $\min_{[0, 2]} f = -1 = f(1)$, $\max_{[0, 2]} f = 1 = f(0) = f(2)$.

4) vedi FILA (A), Es. 3).

5) vedi Esame scritto, 14/02/11, FILA (A), Es. 5).

6) $D_{42,9} = \frac{42!}{(42-9)!} = \frac{42!}{33!}$