

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 Seconda Prova Intermedia di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2010-2011 - Rovereto, 24 gennaio 2011

FILA (A)

$$1) i) \frac{e^{|x^2-1|}}{e^3} < e^{-1} \Leftrightarrow e^{|x^2-1|} < e^2 \Leftrightarrow |x^2-1| < 2 \quad (e^x \text{ è crescente})$$

$$\Leftrightarrow -2 < x^2-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < x^2 < 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[}}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{3x}{x^2-4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{3x}{x^2-4} \leq 1 \quad (\log_{\frac{1}{2}} x \text{ è decrescente})$$

$$\Leftrightarrow (*) \begin{cases} \frac{3x}{x^2-4} > 0 \\ \frac{-x^2+3x+4}{x^2-4} \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Ora } \frac{3x}{x^2-4} > 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 0[\cup]2, +\infty[= S_1$$

infatti:

$\frac{3x}{x^2-4}$	$\frac{-x^2+3x+4}{x^2-4}$
$\frac{3x}{x^2-4}$	$\frac{-x^2+3x+4}{x^2-4}$

$$\frac{-x^2+3x+4}{x^2-4} \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup [-1, 2[\cup [4, +\infty[= S_2$$

infatti:

$\frac{-x^2+3x+4}{x^2-4}$	$\frac{-x^2+3x+4}{x^2-4}$
$\frac{-x^2+3x+4}{x^2-4}$	$\frac{-x^2+3x+4}{x^2-4}$

La soluzione di (*) è $S = S_1 \cap S_2 = \underline{\underline{[-1, 0[\cup [4, +\infty[}}$. $\square$

$$ii) \sum_{n=1}^4 \int_1^2 \frac{(-1)^n}{x^n} dx = - \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx - \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^4} dx =$$

$$= - \left[\log|x| \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 - \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_1^2 =$$

$$= -\log 2 + \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{3} \right) = \underline{\underline{-\log 2 + \frac{5}{12}}}$$

$$2) i) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty$$

infinitesimo negativo, per $x \rightarrow 2^-$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(3x^2 + 1)}{2x} = 0 : \text{ Infatti, } \log(3x^2 + 1) = \log\left(x^2\left(3 + \frac{1}{x^2}\right)\right) =$$

$$= \log x^2 + \log\left(3 + \frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= 2 \log|x| + \log\left(3 + \frac{1}{x^2}\right)$$

e quindi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(3x^2 + 1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log|x|}{x} + \frac{\log(3 + \frac{1}{x^2})}{2x} \right) = 0.$

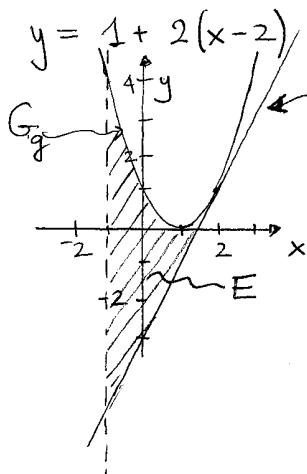
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2}{x} \text{ / : infatti } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 2}{x} = +\infty$$

infinitesimo negativo, per $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 2}{x} = -\infty$$

infinitesimo positivo, per $x \rightarrow 0^+$ $\square$

ii) $g'(x) = 2(x-1) \quad g'(2) = 2$



$y = 2x - 3$ eq. retta tangente al grafico di g nel pt. (2, 1)

$$\text{area } E = \int_{-1}^2 [g(x) - (2x - 3)] dx = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 1 - 2x + 3) dx$$

$$= \int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \int_{-1}^2 (x - 2)^2 dx =$$

$$= \left[\frac{(x - 2)^3}{3} \right]_{-1}^2 = 9.$$

$\blacksquare$

3) i) Usando l'interpretazione geometrica dell'integrale si ha immediatamente che F è positiva su $[-2, 2]$ e $F(-2) = 0$. $\square$

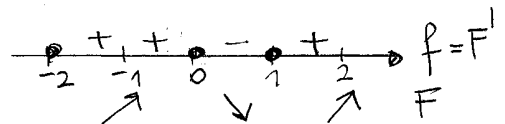
ii) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [-2, 2]$

e quindi risulta che

F è crescente su $[-2, 0]$

è decrescente su $[0, 1]$

è crescente su $[1, 2]$



(anche questo fatto si poteva tranquillamente dedurre dalla definizione di F)

e dalla interpretazione geometrica dell'integrale).

iii) $x = -2$, $x = 1$ pt. di min. locale per F

$x = 0$, $x = 2$ pt. di max. locale per F .

iv) $\min F = F(-2) = \underline{0}$
 $[-2, 2]$

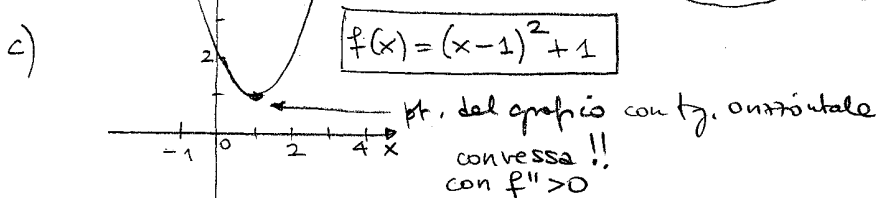
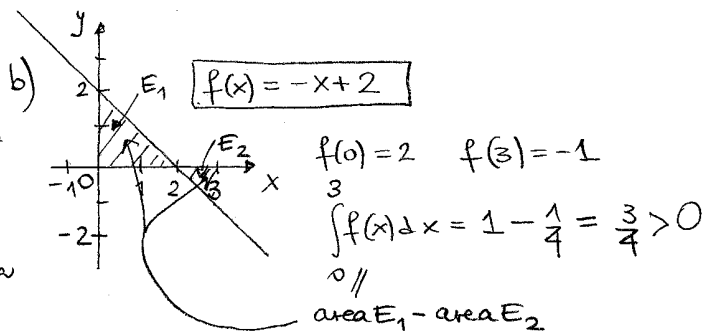
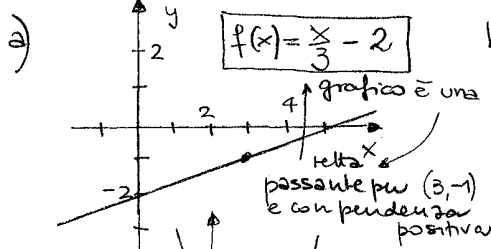
$\max F = F(2) = \underline{2}$, poiché
 $[-2, 2]$

$$F(2) = \underbrace{\int_{-2}^0 f(t) dt}_{>0} + \underbrace{\int_0^1 f(t) dt}_{<0} + \underbrace{\int_1^2 f(t) dt}_{>0}$$

e questo è maggiore di 0.

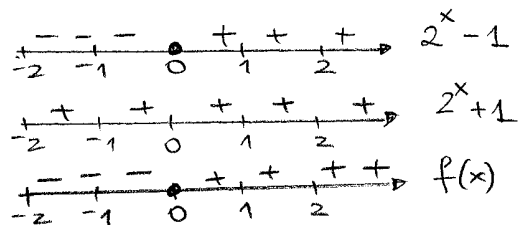
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$$

4) Esempi:



5) $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ (poiché $2^x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

• segno di f



• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = -1$ (poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$!)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1$

(infatti $\frac{2^x(1 - \frac{1}{2^x})}{2^x(1 + \frac{1}{2^x})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$)

$\Rightarrow y = -1$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow -\infty$,
 $y = 1$ è asintoto orizzontale per f , per $x \rightarrow +\infty$.

- f è continua su $\mathbb{R}$, essendo rapporto di funzioni continue, e il denominatore non si annulla mai.

- $\text{dom } f' = \mathbb{R}$
$$f'(x) = \frac{(2^x \log 2)(2^x + 1) - (2^x - 1)(2^x \log 2)}{(2^x + 1)^2} =$$
$$= \frac{(2 \cdot \log 2) 2^x}{(2^x + 1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

la funzione è strett. crescente su $\mathbb{R}$ e non ha pt. critici.

- $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$
$$f''(x) = (2 \log 2) \cdot \frac{(2^x \log 2)(2^x + 1)^2 - 2^x \cdot 2(2^x + 1) 2^x \log 2}{(2^x + 1)^3}$$

$$= (2 \log 2) \frac{2^x \log 2 - (2^x)^2 \log 2}{(2^x + 1)^3}$$

$$= \frac{2(\log 2)^2 2^x (1 - 2^x)}{(2^x + 1)^3} > 0$$

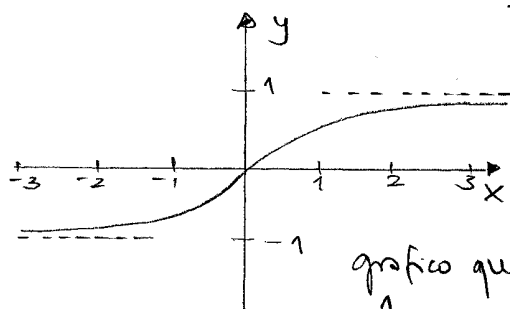
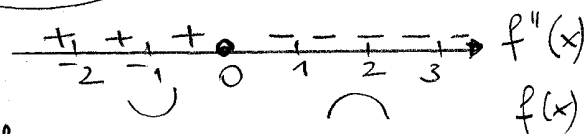


grafico qualitativo di f .



ii)
$$\int_0^1 (f(x) + 1) dx = \int_0^1 \left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1} + 1 \right) dx = \int_0^1 \frac{2 \cdot 2^x}{2^x + 1} dx = \frac{2}{\log 2} \int_0^1 \frac{2^x \log 2}{2^x + 1} dx$$
$$= \frac{2}{\log 2} \left[\log(2^x + 1) \right]_0^1 = \frac{2}{\log 2} \log \frac{3}{2}.$$

iii) $y = k$ con $k \leq -1$ o $k \geq 1$.

6)
$$P_5^2 = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \underline{\underline{60.}}$$

FILA (B)

$$1) i) \frac{2^{|x^2-4|}}{2^4} \geq 2^{-3} \Leftrightarrow 2^{|x^2-4|} \geq 2^1 \Leftrightarrow |x^2-4| \geq 1 \quad (2^x \text{ \textit{crescente}})$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4 \leq -1) \cup (x^2-4 \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 3 \cup x^2 \geq 5$$

$$\Rightarrow S =]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cup [\sqrt{5}, +\infty[.$$

$$\log_4 \left(\frac{3x}{x^2-4} \right) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{3x}{x^2-4} \leq 1 \quad (\log_4 x \text{ \textit{crescente}})$$

$$\Rightarrow S = [-1, 0] \cup [4, +\infty[.$$

(vedi SPI, FILA (A), Es. 1i)

$$ii) \sum_{n=1}^4 \int_1^2 \frac{1}{x^n} dx = \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^4} dx =$$

$$= [\log |x|]_1^2 + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^2 + \left[-\frac{1}{3x^3} \right]_1^2 =$$

$$= \log 2 + \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{3} \right) =$$

$$= \log 2 + \frac{7}{6}$$

$$2) i) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = +\infty$$

infinitesimo positivo, per $x \rightarrow 2^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\log(3x^4+1)} = +\infty \quad (\text{vedi SPI, FILA (A), Es. 2i)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2}{x^3} = \frac{0}{0} \quad : \text{infatti} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 2}{x^3} = +\infty$$

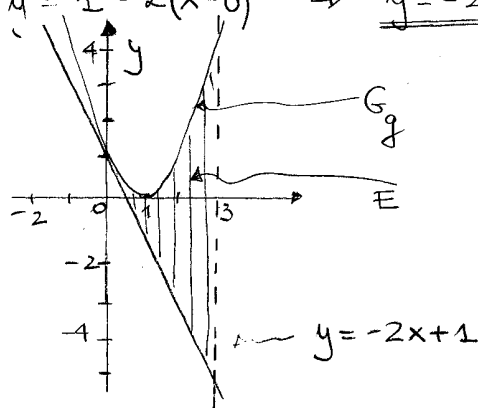
infinitesimo negativo, per $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 2}{x^3} = -\infty$$

infinitesimo positivo, per $x \rightarrow 0^+$

$$ii) g'(x) = 2(x-1) \quad g'(0) = -2$$

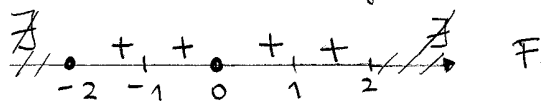
$$y = 1 - 2(x-0) \Rightarrow y = -2x + 1 \quad \text{eq. retta tg. al grafico di } g \text{ nel punto } (0, 1)$$



$$\text{area } E = \int_0^3 [g(x) - (-2x+1)] dx = \int_0^3 [x^2 - 2x + 1 + 2x - 1] dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \underline{\underline{9}}$$

- 3)i) Usando l'interpretazione geometrica dell'integrale si ha immediatamente che F ha il seguente segno:



□

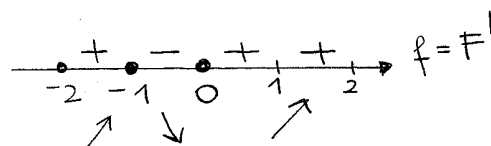
- ii) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x)$

$\forall x \in [-2, 2]$ e quindi risulta che

F è crescente su $[-2, -1]$

e decrescente su $[-1, 0]$

e crescente su $[0, 2]$



(anche questo fatto si poteva tranquillamente dedurre dalla definizione di F e dalla interpretazione geometrica dell'integrale).

□

- iii) $x = -2$, $x = 0$ pt. di min. locale per F

$x = -1$, $x = 2$ pt. di max. locale per F .

□

- iv) $\min F = F(-2) = F(0) = 0$
 $[-2, 2]$

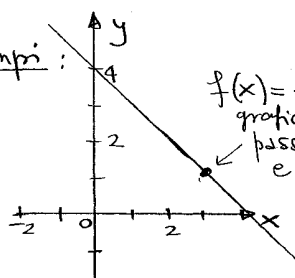
$$\max F = F(2) = \underline{\underline{\frac{13}{8}}}$$

poiché $F(2) = \int_{-2}^2 f(t) dt = \int_{-2}^0 f(t) dt + \int_0^2 f(t) dt$

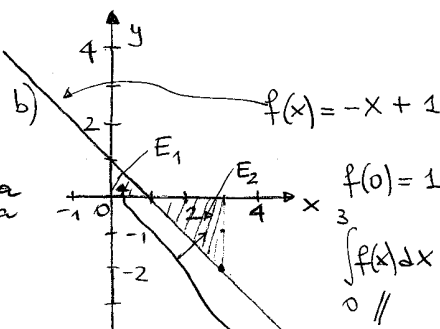
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2} + 2}{2} = \underline{\underline{\frac{13}{8}}}$$

4) Esempi:

a)



$f(x) = -x + 4$
 grafico è una retta
 passante per (3, 1)
 e con pendenza
 negativa

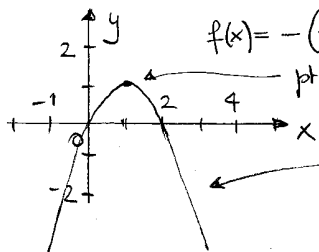


$$f(0) = 1 \quad f(3) = -2$$

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} < 0$$

area E_1 - area E_2

c)



$$f(x) = -(x-1)^2 + 1$$

pt. del grafico con tg. orizzontale

concava !!
 con $f'' < 0$

5) $f(x) = \frac{2 \cdot 2^x}{2^x + 1}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ (poiché $2^x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

• segno di f : $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 2^x}{2^x + 1} = \underline{0}$ (poiché $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0!$)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2^x}{2^x + 1} = \underline{2}$ (infatti $\frac{2^x \cdot 2}{2^x(1 + \frac{1}{2^x})} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$)

$\Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale perf, per $x \rightarrow -\infty$,
 $y = 2$ è asintoto orizzontale perf, per $x \rightarrow +\infty$.

• f è continua in $\mathbb{R}$, essendo rapporto di funzioni continue, e il denominatore non si annulla mai.

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2 \cdot \frac{(2^x \log 2)(2^x + 1) - 2^x \cdot 2^x \log 2}{(2^x + 1)^2} = 2 \frac{2^x \log 2}{(2^x + 1)^2} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$

la funzione è strett. crescente in $\mathbb{R}$ e non ha punti critici.

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = (2 \log 2) \cdot \frac{(2^x \log 2)(2^x + 1)^2 - 2^x \cdot 2(2^x + 1) \cdot 2^x \log 2}{(2^x + 1)^3}$

$= 2(\log 2)^2 \frac{2^x(1 - 2^x)}{(2^x + 1)^3} > 0$

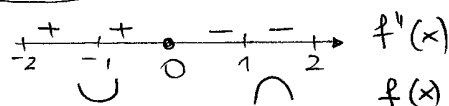
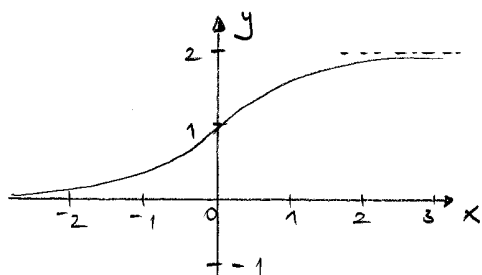
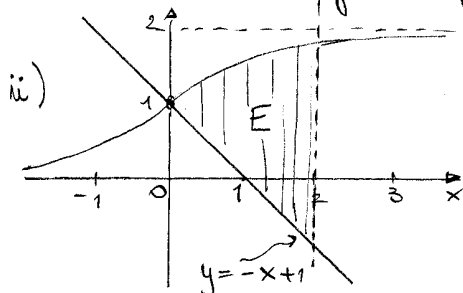


grafico qualitativo di f



area $E = \int_0^2 [f(x) - (-x + 1)] dx =$
 $= \int_0^2 \frac{2 \cdot 2^x}{2^x + 1} dx + \int_0^2 (x - 1) dx =$
 $= \frac{2}{\log 2} \int_0^2 \frac{2^x \log 2}{2^x + 1} dx + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 =$

$= \frac{2}{\log 2} [\log(2^x + 1)]_0^2 + (2 - 2) = \frac{2}{\log 2} \log \frac{5}{2}$

iii) $y = k$ con $k \leq 0$ o $k \geq 2$.

6) $P_6^{2,2} = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = \underline{180}$