

Università di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 Esame scritto di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2010-2011 - Rovereto, 6 giugno 2011

FILA A

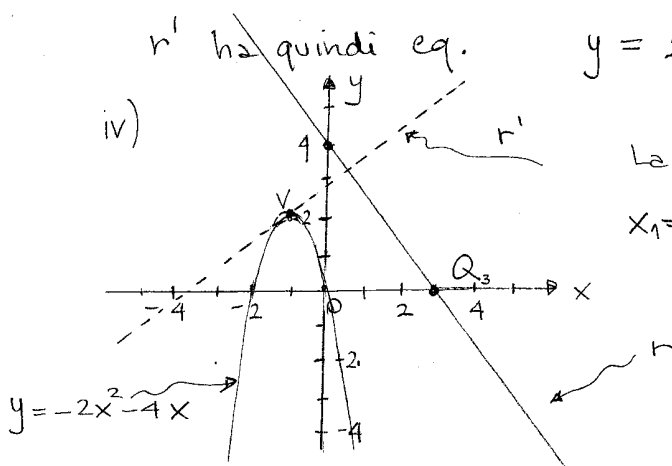
i) $P = (0, 4)$ $Q_k = (k, 0)$ $d(P, Q_k) = \sqrt{k^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow k^2 = 25 - 16 = 9$

Ne segue che $k = 3$ è il nr. reale cercato. $\square$

ii) $P = (0, 4)$ $Q_3 = (3, 0)$: l'eq. della retta passante per P e Q_3 è data da $\frac{y-4}{0-4} = \frac{x-0}{3-0} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + 4$. $\square$

iii) $y + 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow y = -2(x^2 + 2x) \Leftrightarrow y = -2(x+1)^2 + 2$.

Il vertice della parabola data è quindi $V = (-1, 2)$.



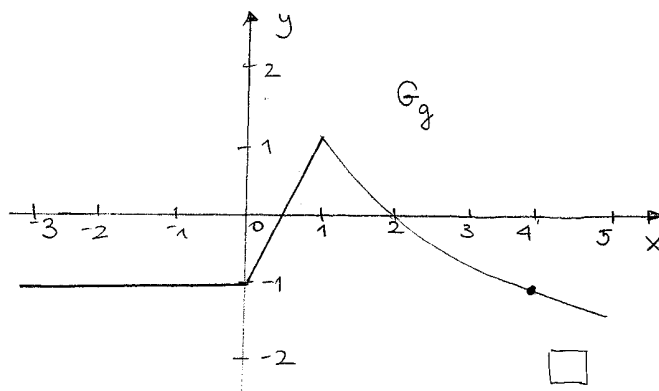
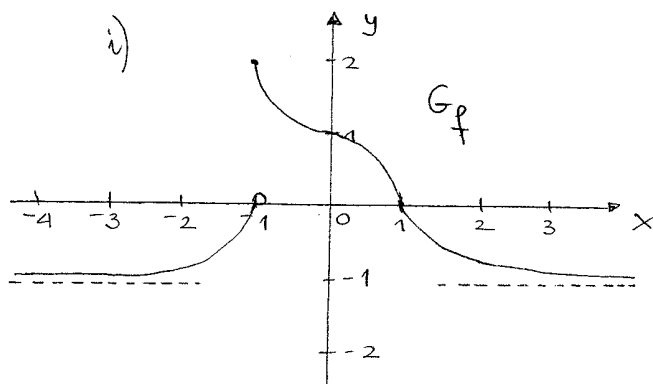
$y = 2 + \frac{3}{4}(x+1)$, ossia $y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$ $\square$

La retta r' interseca la parabola nei pt. di ascissa

$x_1 = -\frac{11}{8}$ e $x_2 = -1$. $\square$

2) $f(x) = \begin{cases} |x^3 - 1| & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} - 1 & \text{altimenti} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 + \log_{\frac{1}{2}} x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$



osserviamo che $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) = 0 \neq f(-1) = 2$,

quindi f è discontinua in $\underline{x = -1}$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x^3 - 1| = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) = 0 = f(1)$

sia che $x = 1$ è un pt. di continuità di f , così come tutti gli altri $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $\square$

iii) $\underline{f(\mathbb{R}) = [-1, 2]}$; g è una funzione limitata superiormente poiché $g(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; non è limitata inferiormente poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. Quindi g non è limitata. $\square$

iv) $\min_{[-1, 4]} g = \underline{-1} \quad x \in \underline{[-1, 0] \cup \{4\}}$ sono pt. di minimo.

$\max_{[-1, 4]} g = \underline{1} \quad \underline{x = 1}$ pt. di massimo. $\square$

v) $(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(2) = \underline{0}$.

poiché $f(-1)$ è ben definito, così come $g(f(-1))$

$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(0) = \underline{1}$.

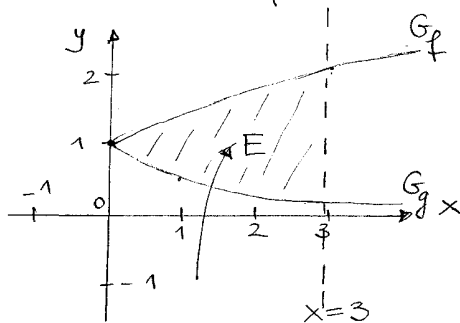
poiché $g(2)$ è ben definito, così come $f(g(2))$. $\square$

vi) L'eq. della retta tg. al grafico di g nel pt. $(\frac{4}{3}, 0)$ è proprio

$$\underline{y = 2x - 1}$$

3) $f(x) = \sqrt{x+1}$ per $x \geq 0$

ii)



$g(x) = \frac{1}{x+1}$ per $x \geq 0$.

$$\text{ii) area } E = \int_0^3 [f(x) - g(x)] dx$$

$$= \int_0^3 \left[\sqrt{x+1} - \frac{1}{x+1} \right] dx$$

$$= \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} - \log|x+1| \right]_0^3$$

$$\text{area } E = \left(\frac{2}{3} (4)^{3/2} - \log 4 \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} - \log 1 \right) = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - \log 4$$

$$= \underline{\underline{\frac{14}{3} - \log 4}}. \quad \square$$

$$\text{ii)} \quad g(x) = \frac{1}{x+1} \quad g^{(1)}(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad g^{(2)}(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \quad g^{(3)}(x) = \frac{-6}{(x+1)^4}$$

$$g^{(4)}(x) = \frac{24}{(x+1)^5} \quad g^{(5)}(x) = \frac{-120}{(x+1)^6}$$

$$\sum_{n=1}^5 g^{(n)}(0) = -1 + 2 - 6 + 24 - 120 = \underline{\underline{-101}}. \quad \blacksquare$$

$$4) \text{ i)} \quad \frac{e^{|x^2-1|} e^x}{e} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{|x^2-1|+x} < e^1 \quad \Leftrightarrow \quad |x^2-1|+x < 1$$

e^x è strett. crescente

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2+x-2 < 0 \end{cases} \quad \text{ o } \quad \begin{cases} x^2-1 < 0 \\ -x^2+x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \text{ o } x \geq 1 \\ -2 < x < 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x < 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S =]-2, 0[}}$$

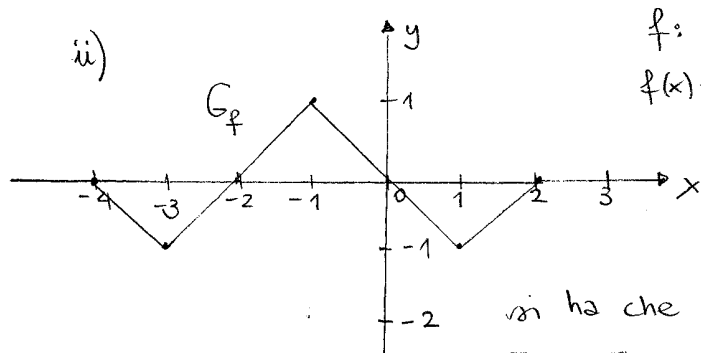
$$\log_{\frac{1}{3}}(|x|-3) - \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |x|-3 > 0 \\ x+1 > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{|x|-3}{x+1}\right) + \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 3 \\ x > -1 \\ \frac{|x|-3}{x+1} \cdot \frac{1}{3} < 1 \end{cases} \quad (\log_{\frac{1}{3}} x \text{ è } \searrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \text{ o } x > 3 \\ x > -1 \\ \frac{|x|-3}{x+1} \cdot \frac{1}{3} < 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 3 \\ x-3 < 3(x+1) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 3 \\ 2x > -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S =]3, +\infty[}}$$

$\square$



$$f: [-4, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = ||x+1|-2|-1$$

Usando l'interpret. geometrica dell'integrale e la def. di $F(x)$

si ha che $F(-4)=0$, F è decrescente su $[-4, -2]$, poi crescente su $[-2, 0]$ e $F(0)=0$.

su $[0, 2]$ è decrescente e $F(-2)=F(2)$. Si ha

$x = -4$, $x = 0$ sono pt. di max, $x = -2$, $x = 2$ pt. di min per F

NOTA: Si può anche usare il teorema fondamentale del calcolo integrale, ossia $F'(x) = f(x)$ su $[-4, 2]$, per lo studio della monotonia di F . $\blacksquare$

5) $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$ i) • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

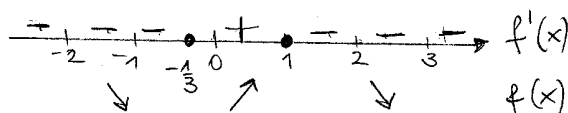
• f è continua in $\mathbb{R}$ essendo prodotto e somma di funz. continue!

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$

$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}$

pt. critici $x_1 = -\frac{1}{3}$ $x_2 = 1$



$x = -\frac{1}{3}$ pt. di min. loc. (sbetta)

$f(-\frac{1}{3}) = +\frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{22}{27}$

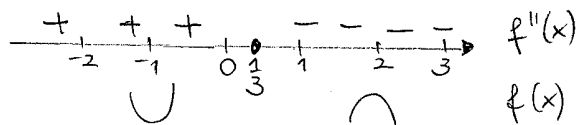
$x = 1$ pt. di max. loc. (sbetta)

$f(1) = -1 + 1 + 1 + 1 = 2$

• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$

$f''(x) = -6x + 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ pt. di flesso



□

ii) f è continua in $\mathbb{R}$, e quindi in $[1, 2]$; $f(1) = 2$, $f(2) = -8 + 4 + 2 + 1 = -1$.

Per il teorema di Weierstrass degli zeri esiste $x_0 \in]1, 2[$ t.c. $f(x_0) = 0$.

Esso è unico, poiché f è sbetta, decrescente in $[1, 2]$.

Oss. che $f(\frac{3}{2}) = -\frac{27}{8} + \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{11}{8} > 0$. Quindi $x_0 \in]\frac{3}{2}, 2[$.
 $\hookrightarrow$ pt. medio di $[1, 2]$

□

iv) $f'(2) = -3 \cdot 4 + 4 + 1 = -7$

$y = -1 - 7(x - 2)$; quindi

l'eq. della retta tg. ricercata è $y = -7x + 13$.

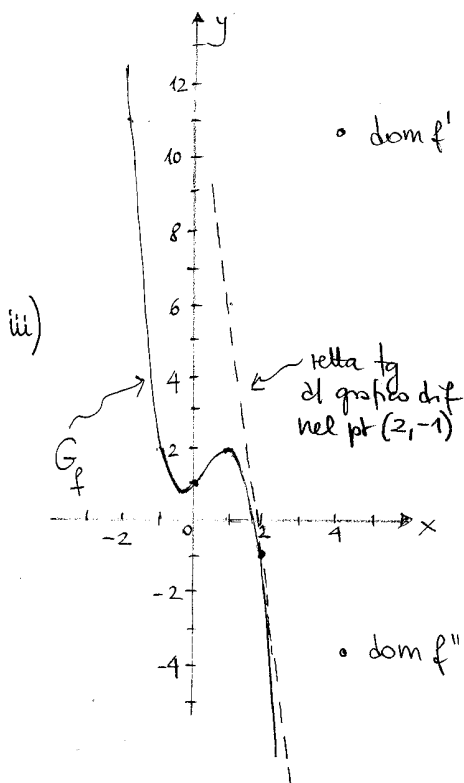
■

6) i) (F) f è continua, ma non è derivabile in $x = -\frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}$ (pt. angolosi).

ii) (V)

iii) (V) Il dominio di f è simmetrico rispetto all'origine e il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse y .

■



FILA (B)

i) $P_k = (k, 0)$ $Q = (0, 3)$ $d(P_k, Q) = \sqrt{k^2 + 9} = 5 \Leftrightarrow k^2 = 25 - 9 = 16$

Ne segue che $k = 4$ è il nr. reale cercato. $\square$

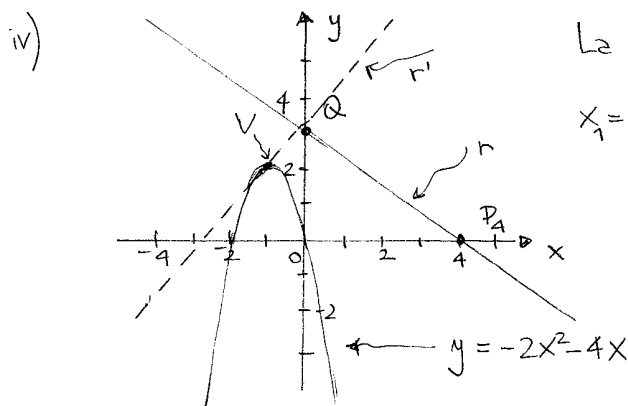
ii) $P_4 = (4, 0)$, $Q = (0, 3)$: l'eq. della retta passante P_4 e Q è

dato da $\frac{y-0}{3-0} = \frac{x-4}{0-4} \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 3$. $\square$

iii) $y + 2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow y = -2(x^2 + 2x) \Leftrightarrow y = -2(x+1)^2 + 2$.

Il vertice della parabola data è quindi $V = (-1, 2)$.

r' ha quindi eq. $y = 2 + \frac{4}{3}(x+1)$, ossia $y = \frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$. $\square$

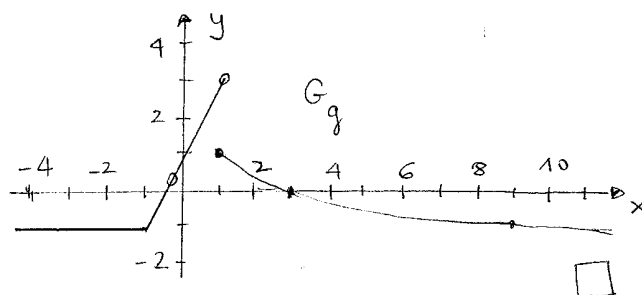
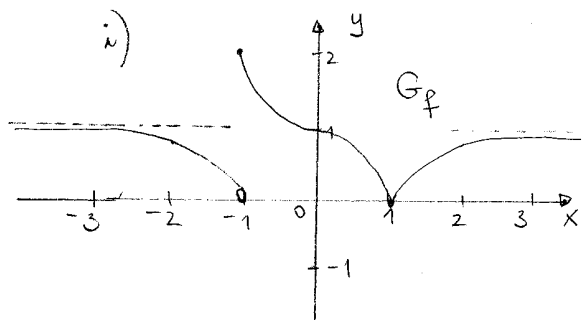


La retta r' interseca la parabola nei pt. di ascissa

$x_1 = -\frac{5}{3}$ e $x_2 = -1$. $\square$

2) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^3 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ \left| \frac{1}{x^2} - 1 \right| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ 2x+1 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 1 + \log_{1/3} x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$



ii) Osserviamo che $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -1 = g(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$. Quindi g è continua in $x = -1$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3 \neq 1 = g(1)$, si ha che g è discontinua in $x = 1$. In tutti gli altri punti del dominio g è continua. $\square$

iii) $f(\mathbb{R}) = [0, 2]$; g è una funzione limitata superiormente poiché $g(x) < 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; non è limitata inferiormente poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$. Quindi g non è limitata. $\square$

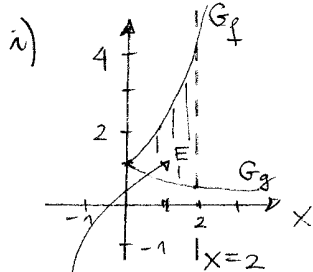
iv) $\min_{[-2, 9]} g = \underline{\underline{-1}} \quad x \in \underline{\underline{[-2, -1] \cup \{9\}}}$ sono pt. di minimo.
 $\max_{[-2, 9]} g \nexists$. $\square$

v) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(0) = \underline{\underline{1}}$.
 poiché $f(1)$ è ben definito, così come $g(f(1))$

$(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(0) = \underline{\underline{1}}$.
 poiché $g(3)$ è ben definito, così come $f(g(3))$ $\square$

vi) L'eq. della retta tg. al grafico di g nel pt. $(\frac{1}{2}, 2)$ è proprio $\underline{\underline{y = 2x + 1}}$. $\blacksquare$

3) $f(x) = 2^x$ per $x \geq 0$ $g(x) = \frac{1}{x+1}$ per $x \geq 0$.



ii) $\text{area } E = \int_0^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^2 \left[2^x - \frac{1}{x+1} \right] dx$
 $= \left[\frac{2^x}{\log 2} - \log|x+1| \right]_0^2 =$
 $= \left(\frac{4}{\log 2} - \log 3 \right) - \left(\frac{1}{\log 2} - \log 1 \right) =$
 $= \underline{\underline{\frac{3}{\log 2} - \log 3}}. \quad \square$

iii) $\sum_{n=1}^5 g^{(n)}(0) = \underline{\underline{-101}}. \quad (\text{vedi Fla } \textcircled{A}, \text{ Es. 3'iii}) \quad \blacksquare$

4)i) $\frac{e^{|x^2-1|} e^x}{e} \geq 1 \Leftrightarrow e^{|x^2-1|+x} \geq e^1 \Leftrightarrow |x^2-1|+x \geq 1$
 e^x è strett. crescente

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x^2+x-2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^2-1 < 0 \\ -x^2+x \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{x \leq -2 \text{ o } x \geq 1\} \quad \text{e} \quad \{0 \leq x \leq 1\}$

$\underline{\underline{S =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[}}.$

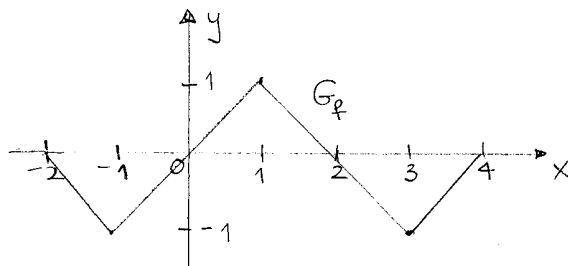
$$\log_3(|x|-4) - \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x|-4 > 0 \\ x+2 > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{|x|-4}{x+2}\right) + \log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \text{ o } x > 4 \\ x > -2 \\ \frac{|x|-4}{x+2} \cdot \frac{1}{3} < 1 \quad (\log_{\frac{1}{3}} x \text{ è } \downarrow) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x-4 < 3(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 2x > -10 \end{cases} \Rightarrow \underline{S =]4, +\infty[}$$

□

ii) $f: [-2, 4]$ $f(x) = ||x-1|-2| - 1$



Usando l'interpretazione geometrica dell'integrale e la def. di $F(x)$ si ha che $F(-2)=0$, F è decrescente su $[-2, 0]$, poi crescente su $[0, 2]$ e $F(2)=0$.

Su $[2, 4]$ è decrescente e $F(4) = F(0)$. Si ha

$x = -2, x = 2$ sono pt. di max,

$x = 0, x = 4$ sono pt. di min. per F .

■

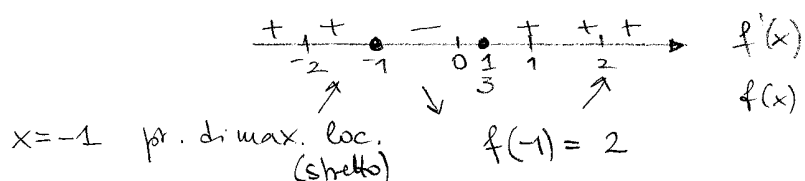
5) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ i) • $\text{dom } f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- f è continua su $\mathbb{R}$ essendo prodotto e somma di funzioni continue!

• $\text{dom } f' = \mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

pt. critici $x_1 = -1$ $x_2 = \frac{1}{3}$

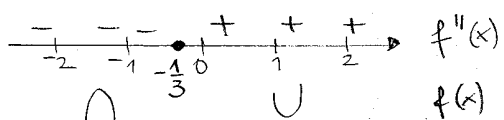


$x = -1$ pt. di max. loc. (stretto) $f(-1) = 2$

$x = \frac{1}{3}$ pt. di min. loc. (stretto) $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{22}{27}$

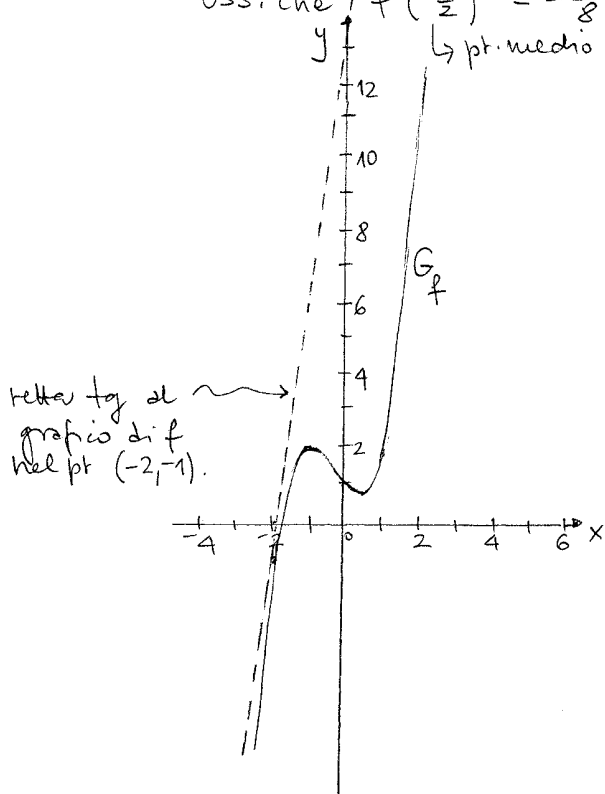
• $\text{dom } f'' = \mathbb{R}$ $f''(x) = 6x + 2$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ pt. di flesso



ii) f è continua in $\mathbb{R}$, e quindi in $[-2, -1]$; $f(-2) = -8 + 4 + 2 + 1 = -1$
 $f(-1) = 2$. Per il teorema di Jenson degli zeri esiste $x_0 \in]-2, -1[$ t.c.
 $f(x_0) = 0$. Esso è unico, poiché f è strett. crescente in $[-2, -1]$.

Oss. che $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{8} + \frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 1 = \frac{11}{8} > 0$. Quindi $x_0 \in]-2, -\frac{3}{2}[$.
 $\hookrightarrow$ pt. medio di $[-2, -1]$ □



iv) $f'(-2) = 12 - 4 - 1 = 7$

$y = -1 + 7(x + 2)$ è l'eq. della retta tg
 al grafico di f nel pt. $(-2, -1)$, ossia

$y = 7x + 13$.

6) i) (V)

ii) (F) : la funzione non è derivabile in $x = 2$ poiché ha un pt. angoloso.

iii) (F) : non è vero che $\forall x \in [-3, 3]$ si ha $f(x) = f(-x)$. Basta prendere $f(-3) < 0$ e $f(3) > 0$. ■