

Università degli Studi di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive
 CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
 CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia
 Esame Scritto di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
 a.a. 2010-2011 - Rovereto, 24 gennaio 2011

FILA A

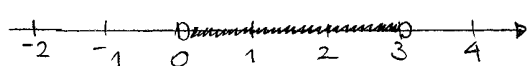
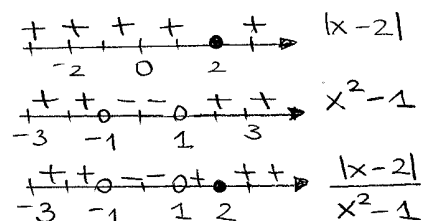
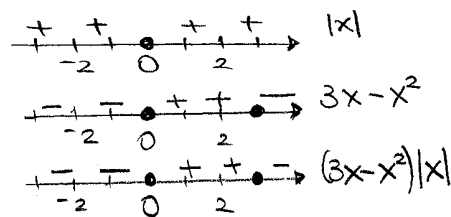
- 1) i) a) C'è (almeno) un test che viene svolto in tutte le facoltà dell'Università degli Studi di Trento.
 b) In ogni università c'è (almeno) un test che viene svolto in tutte le facoltà. ☐
- ii) a) (V) : Infatti, preso una qualunque $x \in \mathbb{Z}$, basta prendere $y = -x$ e si ha che $x + y = 0$.
 (F) : basta sostituire e si ha $||1-4|-2| = |3-2| = 1$ e quindi $-2 \notin \{x \in \mathbb{R} : ||1-x^2|+x| < 1\}$. ☐

2) $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(3x-x^2)|x|} > 0\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x-2|}{x^2-1} \leq 0\}$

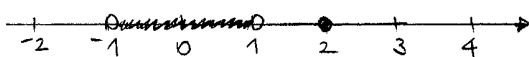
i) $\sqrt{(3x-x^2)|x|} > 0 \Leftrightarrow (3x-x^2)|x| > 0$

$\Rightarrow A =]0, 3[$

$\Rightarrow B =]-1, 1[\cup \{2\}$



$\min = A$



$\min = B$



ii) $A \cup B =]-1, 3[$ $B \setminus A =]-1, 0]$

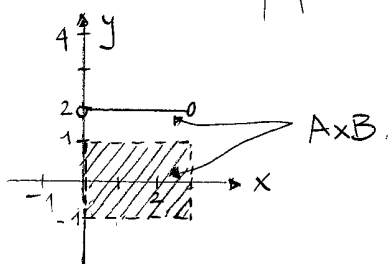


iii) A e B sono insiemi limitati. ☐

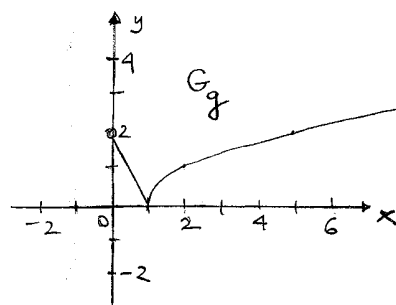
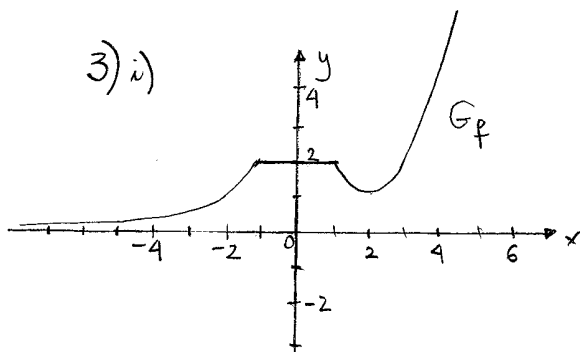
iv) $\nexists \min B$; $\max B = 2$.

B non è un intervallo, poiché $[1, 2[\not\subset B$ (c'è un "buco" in B) ☐

v)



3) i)



$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$



ii) se $k \leq 0$ Sono soluzioni dell'eq. $f(x) = k$;

$0 < k < 1$ $\exists$ una soluzione " ;

$k = 1$ Sono due soluzioni " ;

$1 < k < 2$ Sono tre soluzioni " ;

$k = 2$ Sono infinite soluzioni " ;

$k > 2$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$.



iii) $(f \circ g)(5)$ esiste poiché esiste $g(5)$ e vale 2 ed esiste $f(2)$!

Si ha $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = \underline{\underline{1}}$.

$(f \circ g)(0)$ ~~non~~ esiste poiché esiste $f(0)$, ma ~~non~~ $g(0)$!

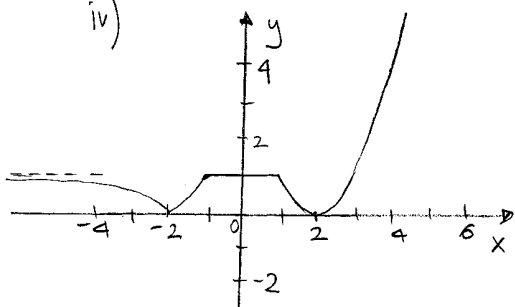
$\left(\frac{f}{g}\right)(1)$ ~~non~~ esiste poiché $g(1) = 0$!

$\left(\frac{g}{f}\right)(1)$ $\exists$ poiché $g(1) = 0$, $f(1) = 2 \neq 0$ e quindi

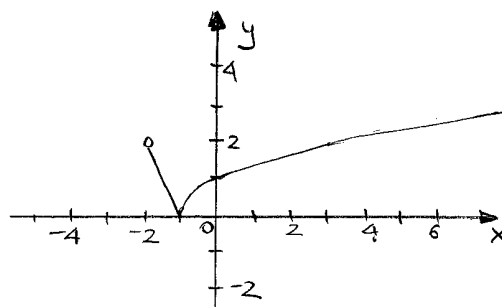
$$\left(\frac{g}{f}\right)(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \underline{\underline{0}}.$$



iv)



$\mathbb{R} \ni x \mapsto |f(x) - 1|$

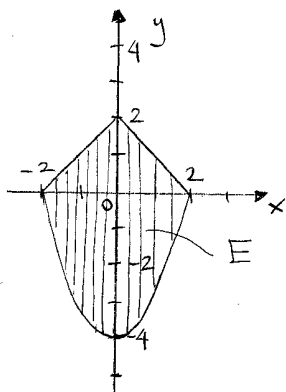


$]-2, +\infty[\ni x \mapsto g(x+2)$



4) i) Vedi SPI, FILA (B) Es. 1) i).

ii)



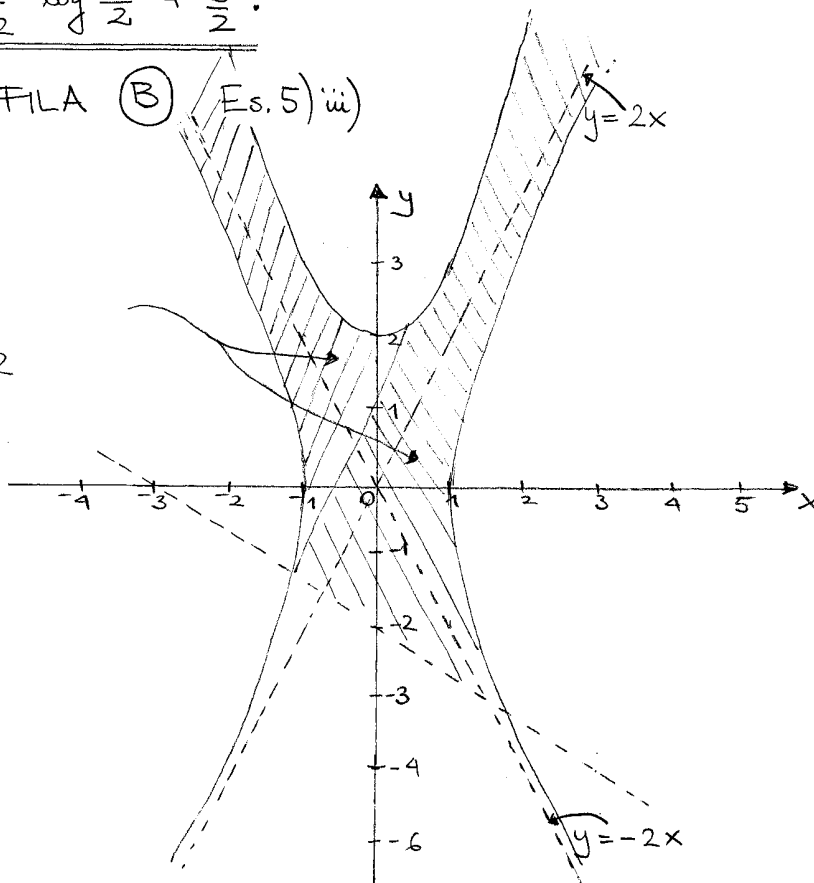
$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx - \int_{-2}^2 g(x) dx \\ &= \frac{4 \cdot 2}{2} - 2 \int_0^2 (x^2 - 4) dx = \\ &\quad (\text{area triangolo di vertici } (\pm 2, 0), (0, 2)) \\ &= 4 - 2 \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_0^2 = 4 - 2 \left[\frac{8}{3} - 8 \right] = \frac{44}{3}. \end{aligned}$$

5) i) Vedi SPI, FILA (B) Es. 5) i).

$$\begin{aligned} \text{ii) area } E &= \int_0^3 [f(x) - (-x+1)] dx = \int_0^3 \frac{2 \cdot 2^x}{2^x + 1} dx + \int_0^3 (x-1) dx = \\ &= \frac{2}{\log 2} \int_0^3 \frac{2^x \log 2}{2^x + 1} dx + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^3 = \frac{2}{\log 2} [\log(2^x + 1)]_0^3 + \left(\frac{9}{2} - 3 \right) \\ &= \frac{2}{\log 2} \log \frac{9}{2} + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

iii) Vedi SPI, FILA (B) Es. 5) iii)

$$\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} \leq 1 \\ y \leq x^2 + 2 \\ y > -\frac{2}{3}x - 2 \end{cases}$$



FILA (B)

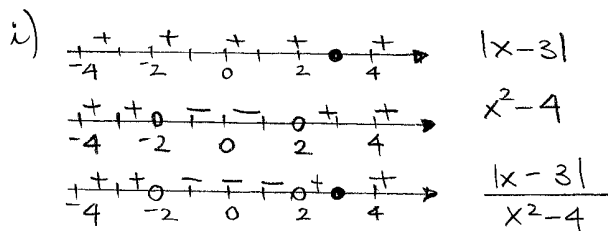
1) i) a) C'è (almeno) un'università nella quale in ogni facoltà viene svolto il test di Matematica di base.

b) C'è (almeno) un test che viene svolto in tutte le università e in ogni facoltà. $\square$

ii) a) (F) : basta sostituire e si ha $||1-1|-1|=1$ e quindi $-1 \notin \{x \in \mathbb{R} : ||1-x^2|+x| > 1\}$.

(V) : Infatti, preso una qualunque $x \in \mathbb{Z}$, basta prendere $y = -x+1$ e si ha che $x+y=1$. $\blacksquare$

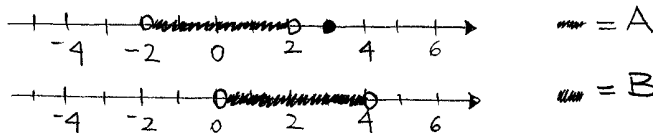
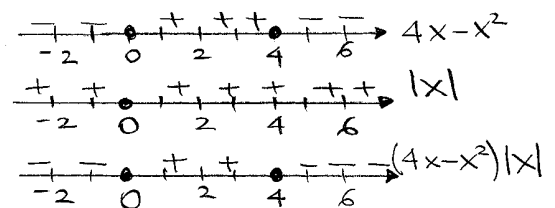
2) $A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x-3|}{x^2-4} \leq 0\}$ $B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{(4x-x^2)|x|} > 0\}$



$A =]-2, 2[\cup \{3\}$

$\sqrt{(4x-x^2)|x|} > 0 \iff (4x-x^2)|x| > 0$

$B =]0, 4[$



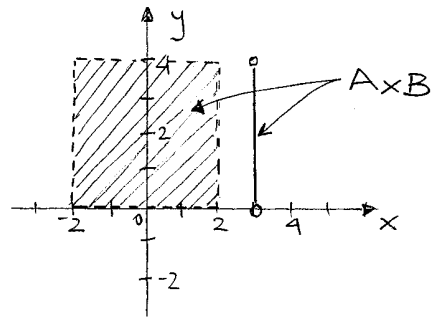
ii) $A \cup B =]-2, 4[$ $B \setminus A = [2, 4[\setminus \{3\}$

iii) A e B sono insiemi limitati. $\square$

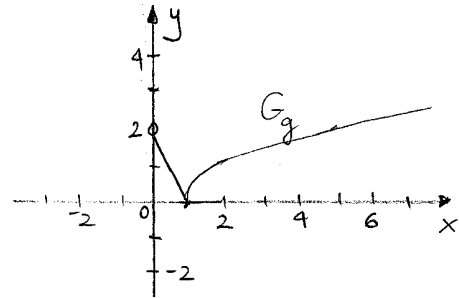
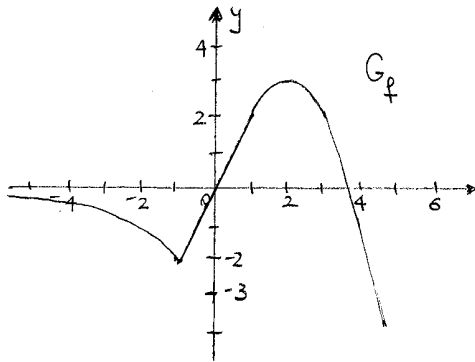
iv) $\nexists \min A$; $\max A = \{3\}$.

A non è un intervallo, poiché $[2, 3[\not\subset A$ (c'è un "buco" in A). $\square$

v)



3) i)



$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 1 &= -(x^2 - 4x) - 1 \\ &= -(x-2)^2 + 3 \end{aligned}$$

ii) se $k < -2$ $\exists$ una soluzione dell'eq. $f(x) = k$;

$k = -2$ Sono due soluzioni " ;

$-2 < k < 0$ Sono tre soluzioni " ;

$0 \leq k < 3$ Sono due soluzioni " ;

$k = 3$ $\exists$ una soluzione " ;

$k > 3$ $\nexists$ soluzioni dell'eq. $f(x) = k$.

iii) $(f \circ g)(5)$ esiste poiché esiste $g(5)$ e vale 2 ed esiste $f(2)$!

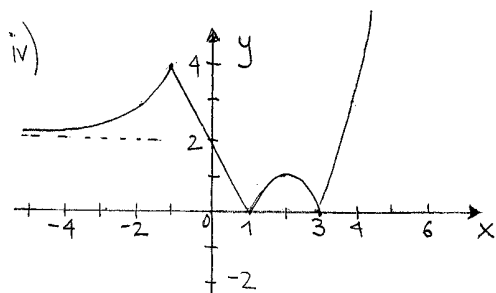
$$\text{Si ha } (f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = \underline{\underline{3}}.$$

$(f \circ g)(0) \nexists$ poiché $f(0)$ esiste, ma $g(0) \nexists$!

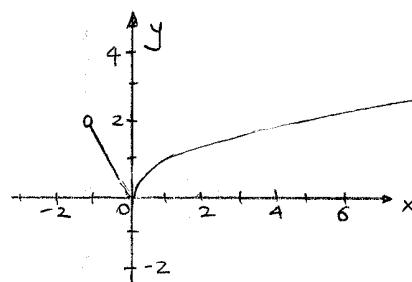
$\left(\frac{f}{g}\right)(1) \nexists$ poiché $g(1) = 0$!

$\left(\frac{g}{f}\right)(1) \exists$ poiché $g(1) = 0$, $f(1) = 2$ e quindi

$$\left(\frac{g}{f}\right)(1) = \frac{g(1)}{f(1)} = \underline{\underline{0}}.$$

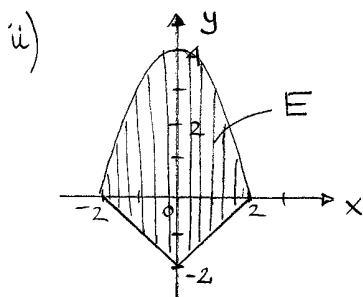


$$\mathbb{R} \ni x \mapsto |f(x) - 2|$$



$$]-1, +\infty[\ni x \mapsto g(x+1)$$

4) i) Vedi SPI, FILA (A), Es. 4) i)



$$\begin{aligned} \text{area } E &= \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx - \int_{-2}^2 g(x) dx \\ &= 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx + \frac{4 \cdot 2}{2} \\ &\quad (\text{area triangolo di vertici } (\pm 2, 0) \text{ e } (0, -2)) \end{aligned}$$

$$= 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 + 4 = \underline{\underline{\frac{44}{3}}}$$

5) i) Vedi SPI, FILA (A) Es. 5 i)

ii)

$$\begin{aligned} \int_0^1 (f(x) + 1) dx &= \int_0^1 \left(\frac{2^x - 1}{2^x + 1} + 1 \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{2^x - 1 + 2^x + 1}{2^x + 1} \right) dx = \frac{2}{\log 2} \int_0^1 \frac{2^x \log 2}{2^x + 1} dx \\ &= \frac{2}{\log 2} \left[\log(2^x + 1) \right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{2}{\log 2} \log \frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

iii) Vedi SPI, FILA (A) Es. 5 iii).

6)

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{4} + y^2 &\geq 1 \\ y &> -x^2 - 2 \\ y &\leq \frac{x}{3} + 2 \end{aligned}$$

