COGNOME ____________________		NON SCRIVERE QUI	A
NOME ____________________		1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋			

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2010-2011 — ROVERETO, 6 GIUGNO 2011

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Determinate un numero reale $k > 0$ tale che la distanza tra $P = (0,4)$ e $Q_k = (k,0)$ sia 5.
ii) Determinate l'equazione della retta r passante per i punti P e Q_k, con k determinato in i).
iii) Determinate l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per il vertice della parabola di equazione $y + 2x^2 + 4x = 0$.
iv) Rappresentate graficamente nello stesso sistema di riferimento le rette r e r', e la parabola.

2) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} |x^3 - 1| & \text{se } x \in [-1,1] \\ \dfrac{1}{x^2} - 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 2x - 1 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ 1 + \log_{\frac{1}{2}} x & \text{se } x \ge 1 . \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g.
ii) Determinate eventuali punti di discontinuità di f su $\mathbb{R}$.
iii) Determinate l'immagine di f. Dite se g è una funzione limitata.
iv) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di g su $[-1,4]$.
v) Calcolate $(g \circ f)(-1)$ e $(f \circ g)(2)$.
vi) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $(\frac{1}{2}, 0)$.

3) Siano $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g.
ii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f, dal grafico di g e dalla retta di equazione $x = 3$.
iii) Calcolate $\sum_{n=1}^{5} g^{(n)}(0)$, dove $g^{(n)}$ indica la derivata n-esima di g (ossia $g^{(1)}(x) = g'(x)$, $g^{(2)}(x) = g''(x)$, e così via).

---

4) i) Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$\frac{e^{|x^2-1|}e^x}{e} < 1; \qquad \log_{\frac{1}{3}}(|x|-3) - \log_{\frac{1}{3}}(x+1) + 1 > 0.$$

ii) Sia $f : [-4,2] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = ||x+1|-2|-1$. Sia $F : [-4,2] \to \mathbb{R}$ la sua funzione integrale definita da $F(x) = \int_{-4}^{x} f(t)\,dt$. Determinate gli intervalli di monotonia di F e i suoi eventuali punti di massimo e di minimo.

---

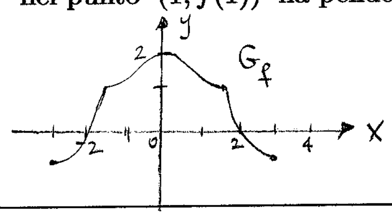
5) i) Studiate (insieme di definizione, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = -x^3 + x^2 + x + 1.$$

ii) Verificate che esiste $x_0 \in]1,2[$ tale che $f(x_0) = 0$. Esso è unico. Perchè? Determinate un intervallo $]a,b[\subset]1,2[$ tale che $x_0 \in]a,b[$ e $b - a < \frac{1}{2}$.
iii) Rappresentate graficamente f.
iv) Determinate l'equazione dalla retta tangente al grafico di f nel punto $(2,-1)$ e rappresentatela graficamente nello stesso riferimento della f.

---

6) Sia $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.
i) La funzione f è continua e derivabile.
ii) La retta tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1))$ ha pendenza negativa.
iii) La funzione è pari.



COGNOME ______	NON SCRIVERE QUI
NOME ______	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA ______	B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CDL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CDL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CDL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2010-2011 — ROVERETO, 6 GIUGNO 2011

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.
Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.
È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.
Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

1) i) Determinate un numero reale $k > 0$ tale che la distanza tra $P_k = (k, 0)$ e $Q = (0, 3)$ sia 5.
ii) Determinate l'equazione della retta r passante per i punti P_k e Q, con k determinato in i).
iii) Determinate l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per il vertice della parabola di equazione $y + 2x^2 + 4x = 0$.
iv) Rappresentate graficamente nello stesso sistema di riferimento le rette r e r', e la parabola.

2) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^3 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ \left|\dfrac{1}{x^2} - 1\right| & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1 \\ 2x + 1 & \text{se } -1 \le x < 1 \\ 1 + \log_{\frac{1}{3}} x & \text{se } x \ge 1 . \end{cases}$$

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g.
ii) Determinate eventuali punti di discontinuità di g su $\mathbb{R}$.
iii) Determinate l'immagine di f. Dite se g è una funzione limitata.
iv) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di g su $[-2, 9]$.
v) Calcolate $(g \circ f)(1)$ e $(f \circ g)(3)$.
vi) Determinate l'equazione della retta tangente al grafico di g nel punto $(\frac{1}{2}, 2)$.

3) Siano $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g.
ii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f, dal grafico di g e dalla retta di equazione $x = 2$.
iii) Calcolate $\sum_{n=1}^{5} g^{(n)}(0)$, dove $g^{(n)}$ indica la derivata n-esima di g (ossia $g^{(1)}(x) = g'(x)$, $g^{(2)}(x) = g''(x)$, e cosi̇̀ via).

---

4) i) Risolvete in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni:

$$\frac{e^{|x^2-1|}e^x}{e} \geq 1; \qquad \log_{\frac{1}{3}}(|x|-4) - \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + 1 > 0.$$

ii) Sia $f : [-2,4] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = ||x-1|-2|-1$. Sia $F : [-2,4] \to \mathbb{R}$ la sua funzione integrale definita da $F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,dt$. Determinate gli intervalli di monotonia di F e i suoi eventuali punti di massimo e di minimo.

---

5) i) Studiate (insieme di definizione, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = x^3 + x^2 - x + 1.$$

ii) Verificate che esiste $x_0 \in]-2,-1[$ tale che $f(x_0) = 0$. Esso è unico. Perchè? Determinate un intervallo $]a,b[\subset]-2,-1[$ tale che $x_0 \in]a,b[$ e $b - a < \frac{1}{2}$.
iii) Rappresentate graficamente f.
iv) Determinate l'equazione dalla retta tangente al grafico di f nel punto $(-2,-1)$ e rappresentatela graficamente nello stesso riferimento della f.

---

6) Sia $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura. Dite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false.
i) La retta tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1))$ ha pendenza positiva.
ii) La funzione f è continua e derivabile.
iii) La funzione è pari.