

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2010-2011 — ROVERETO, 14 FEBBRAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematiche la seguente proposizione: "In ogni Corso di Laurea della Facoltà di Scienze Cognitive è iscritto almeno uno studente straniero." Scrivete poi la sua negazione (sempre in matematiche).

ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 4 - |x + 1| \leq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x| - 2}{1 - e^x} > 0\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(3x) - \log_2(x^2 + 1) < 1\}.$$

- a) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.
b) Determinate gli insiemi $A \cap B$ e $C \cup B$.

- 2) Sia V il vertice della parabola \mathcal{P} di equazione $y + x^2 + 2x - 2 = 0$. Sia C_1 il centro della circonferenza \mathcal{C} di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 16 = 0$$

e sia C_2 il centro dell'ellisse \mathcal{E} di equazione

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0.$$

- i) Scrivete l'equazione della retta r passante per V e per C_2 .
ii) Scrivete l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per C_1 .
iii) Rappresentate graficamente \mathcal{P} , \mathcal{C} e \mathcal{E} . Rappresentate le rette r e r' nello stesso sistema di riferimento della parabola, della circonferenza e dell'ellisse.
iv) Determinate il perimetro del triangolo di vertici V , C_1 e C_2 .

3) Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -e^x & \text{se } x \leq 0 \\ (x-1)^3 & \text{se } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \leq 0 \\ \log_2(x+1) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g .
- ii) Determinate l'immagine di f .
- iii) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di f su \mathbb{R} .
- iv) Determinate il più grande intervallo non limitato superiormente sul quale g risulta iniettiva.
- v) Calcolate $(f+g)(0)$, $(f \circ g)(3)$ e $(g \circ f)(0)$.
- vi) Rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto |f(x) - 1|$ e $x \mapsto -2g(x)$.

4) Siano $f, g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = 2^x - 1$ e $g(x) = -\sqrt{x}$.

i) Rappresentate graficamente f e g .

ii) Calcolate $\sum_{n=1}^4 (-1)^n f(n)$ e $\sum_{n=1}^4 g'(n^2)$, dove g' indica la derivata prima di g .

iii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e g e dalla retta di equazione $x - 3 = 0$.

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

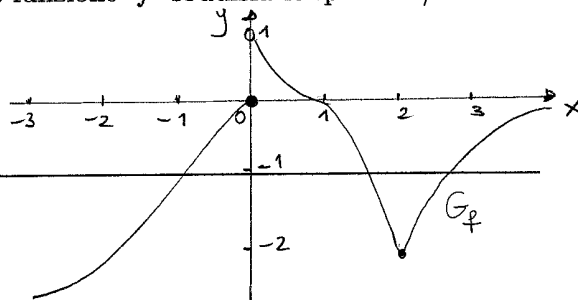
ii) Verificate che $f(x) = x + 2 + \frac{9}{x-2}$ sull'insieme di definizione di f .

iii) Calcolate $\int_0^1 f(x) dx$.

6) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.

i) Dite (motivando la risposta) se su $[0, 2]$ la funzione f soddisfa le ipotesi e/o la tesi del teorema di Weierstrass.

ii) Dite (motivando la risposta) se su $[0, 2]$ la funzione f soddisfa le ipotesi e/o la tesi del teorema di esistenza degli zeri.

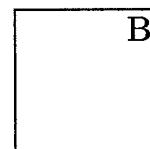


COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA

--	--	--	--	--	--

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---



UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA
CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE
CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2010-2011 — ROVERETO, 14 FEBBRAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematiche la seguente proposizione: "C'è almeno un Corso di Laurea dell'Università di Bologna in cui sono iscritti tutti studenti stranieri." Scrivete poi la sua negazione (sempre in matematiche).

ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x| - 3}{1 - e^x} > 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 3 - |x + 1| \leq 1\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(3x) - \log_2(x^2 + 1) \leq 1\}.$$

- a) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.
b) Determinate gli insiemi $A \cap B$ e $C \cup B$.

- 2) Sia V il vertice della parabola \mathcal{P} di equazione $y + x^2 - 2x - 2 = 0$. Sia C_1 il centro della circonferenza \mathcal{C} di equazione

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$$

e sia C_2 il centro dell'ellisse \mathcal{E} di equazione

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0.$$

- i) Scrivete l'equazione della retta r passante per V e per C_2 .
ii) Scrivete l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per C_1 .
iii) Rappresentate graficamente \mathcal{P} , \mathcal{C} e \mathcal{E} . Rappresentate le rette r e r' nello stesso sistema di riferimento della parabola, della circonferenza e dell'ellisse.
iv) Determinate il perimetro del triangolo di vertici V , C_1 e C_2 .

3) Siano $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ -(x-1)^3 & \text{se } 0 < x < 2 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \leq 0 \\ \log_2(x+1) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano f e g .
 - ii) Determinate l'immagine di f .
 - iii) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di f su \mathbb{R} .
 - iv) Determinate il più grande intervallo non limitato superiormente sul quale g risulta iniettiva.
 - v) Calcolate $(f+g)(0)$, $(f \circ g)(3)$ e $(g \circ f)(0)$.
 - vi) Rappresentate graficamente le funzioni $x \mapsto |f(x) - 1|$ e $x \mapsto -2g(x)$.
-

4) Siano $f, g: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ le funzioni definite da $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \frac{1}{x+1}$.

- i) Rappresentate graficamente f e g .
 - ii) Calcolate $\sum_{n=0}^4 (-1)^{n+1} f(n)$ e $\sum_{n=0}^3 g'(n)$, dove g' indica la derivata prima di g .
 - iii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di f e g e dalla retta di equazione $x - 2 = 0$.
-

5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{x - 3}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Verificate che $f(x) = x + 3 + \frac{16}{x-3}$ sull'insieme di definizione di f .
 - iii) Calcolate $\int_0^1 f(x) dx$.
-

6) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione rappresentata in figura.

- i) Dite (motivando la risposta) se su $[0, 2]$ la funzione f soddisfa le ipotesi e/o la tesi del teorema di Weierstrass.
- ii) Dite (motivando la risposta) se su $[0, 2]$ la funzione f soddisfa le ipotesi e/o la tesi del teorema di esistenza degli zeri.

