

COGNOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_  
MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6

A

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2010-2011 — ROVERETO, 14 FEBBRAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematiche la seguente proposizione: "In ogni Corso di Laurea della Facoltà di Scienze Cognitive è iscritto almeno uno studente straniero." Scrivete poi la sua negazione (sempre in matematiche).

- ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 4 - |x + 1| \leq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x| - 2}{1 - e^x} > 0\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(3x) - \log_2(x^2 + 1) < 1\}.$$

- a) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.  
b) Determinate gli insiemi  $A \cap B$  e  $C \cup B$ .

- 2) Sia  $V$  il vertice della parabola  $\mathcal{P}$  di equazione  $y + x^2 + 2x - 2 = 0$ . Sia  $C_1$  il centro della circonferenza  $\mathcal{C}$  di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 16 = 0$$

e sia  $C_2$  il centro dell'ellisse  $\mathcal{E}$  di equazione

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0.$$

- i) Scrivete l'equazione della retta  $r$  passante per  $V$  e per  $C_2$ .  
ii) Scrivete l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $C_1$ .  
iii) Rappresentate graficamente  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{E}$ . Rappresentate le rette  $r$  e  $r'$  nello stesso sistema di riferimento della parabola, della circonferenza e dell'ellisse.  
iv) Determinate il perimetro del triangolo di vertici  $V$ ,  $C_1$  e  $C_2$ .

- 3) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} -e^x & \text{se } x \leq 0 \\ (x-1)^3 & \text{se } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \leq 0 \\ \log_2(x+1) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano  $f$  e  $g$ .
  - ii) Determinate l'immagine di  $f$ .
  - iii) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di  $f$  su  $\mathbb{R}$ .
  - iv) Determinate il più grande intervallo non limitato superiormente sul quale  $g$  risulta iniettiva.
  - v) Calcolate  $(f+g)(0)$ ,  $(f \circ g)(3)$  e  $(g \circ f)(0)$ .
  - vi) Rappresentate graficamente le funzioni  $x \mapsto |f(x) - 1|$  e  $x \mapsto -2g(x)$ .
- 

- 4) Siano  $f, g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da  $f(x) = 2^x - 1$  e  $g(x) = -\sqrt{x}$ .

- i) Rappresentate graficamente  $f$  e  $g$ .
  - ii) Calcolate  $\sum_{n=1}^4 (-1)^n f(n)$  e  $\sum_{n=1}^4 g'(n^2)$ , dove  $g'$  indica la derivata prima di  $g$ .
  - iii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di  $f$  e  $g$  e dalla retta di equazione  $x - 3 = 0$ .
- 

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

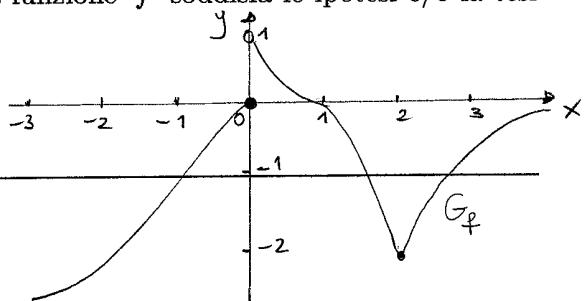
$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Verificate che  $f(x) = x + 2 + \frac{9}{x-2}$  sull'insieme di definizione di  $f$ .
  - iii) Calcolate  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 

- 6) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione rappresentata in figura.

- i) Dite (motivando la risposta) se su  $[0, 2]$  la funzione  $f$  soddisfa le ipotesi e/o la tesi del teorema di Weierstrass.
  - ii) Dite (motivando la risposta) se su  $[0, 2]$  la funzione  $f$  soddisfa le ipotesi e/o la tesi del teorema di esistenza degli zeri.
- 



COGNOME \_\_\_\_\_  
NOME \_\_\_\_\_  
MATRICOLA | | | | | |

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

B

UNIVERSITÀ DI TRENTO — FACOLTÀ DI SCIENZE COGNITIVE

CdL IN SCIENZE E TECNICHE DI PSICOLOGIA COGNITIVA  
CdL IN INTERFACCE E TECNOLOGIE DELLA COMUNICAZIONE  
CdL IN FILOSOFIA

ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

A.A. 2010-2011 — ROVERETO, 14 FEBBRAIO 2010

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo in stampatello cognome, nome e numero di matricola. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti. Il tempo massimo per svolgere la prova è di **TRE ORE**.

Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti gli altri fogli, compreso quello con il testo, dentro uno dei fogli a quadretti.

Potete usare solo il vostro materiale di scrittura e il vostro materiale di studio. Non usate il colore rosso.

- 1) i) Scrivete in matematiche la seguente proposizione: "C'è almeno un Corso di Laurea dell'Università di Bologna in cui sono iscritti tutti studenti stranieri." Scrivete poi la sua negazione (sempre in matematiche).

- ii) Siano dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \frac{|x| - 3}{1 - e^x} > 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq 3 - |x + 1| \leq 1\},$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \log_2(3x) - \log_2(x^2 + 1) \leq 1\}.$$

- a) Determinateli e rappresentateli sulla retta reale.  
b) Determinate gli insiemi  $A \cap B$  e  $C \cup B$ .

- 2) Sia  $V$  il vertice della parabola  $\mathcal{P}$  di equazione  $y + x^2 - 2x - 2 = 0$ . Sia  $C_1$  il centro della circonferenza  $\mathcal{C}$  di equazione

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$$

e sia  $C_2$  il centro dell'ellisse  $\mathcal{E}$  di equazione

$$x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0.$$

- i) Scrivete l'equazione della retta  $r$  passante per  $V$  e per  $C_2$ .  
ii) Scrivete l'equazione della retta  $r'$  perpendicolare alla retta  $r$  e passante per  $C_1$ .  
iii) Rappresentate graficamente  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{E}$ . Rappresentate le rette  $r$  e  $r'$  nello stesso sistema di riferimento della parabola, della circonferenza e dell'ellisse.  
iv) Determinate il perimetro del triangolo di vertici  $V$ ,  $C_1$  e  $C_2$ .

- 3) Siano  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ -(x-1)^3 & \text{se } 0 < x < 2 \\ -\frac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x \geq 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{se } x \leq 0 \\ \log_2(x+1) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

- i) Rappresentate graficamente nel piano cartesiano  $f$  e  $g$ .
  - ii) Determinate l'immagine di  $f$ .
  - iii) Determinate, se esistono, il minimo e/o il massimo (risp. i punti di minimo e/o di massimo) di  $f$  su  $\mathbb{R}$ .
  - iv) Determinate il più grande intervallo non limitato superiormente sul quale  $g$  risulta iniettiva.
  - v) Calcolate  $(f+g)(0)$ ,  $(f \circ g)(3)$  e  $(g \circ f)(0)$ .
  - vi) Rappresentate graficamente le funzioni  $x \mapsto |f(x) - 1|$  e  $x \mapsto -2g(x)$ .
- 

- 4) Siano  $f, g : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  le funzioni definite da  $f(x) = 3^x$  e  $g(x) = \frac{1}{x+1}$ .

- i) Rappresentate graficamente  $f$  e  $g$ .
  - ii) Calcolate  $\sum_{n=0}^4 (-1)^{n+1} f(n)$  e  $\sum_{n=0}^3 g'(n)$ , dove  $g'$  indica la derivata prima di  $g$ .
  - iii) Calcolate l'area della regione piana delimitata dal grafico di  $f$  e  $g$  e dalla retta di equazione  $x - 2 = 0$ .
- 

- 5) i) Studiate (insieme di definizione, segno, comportamento agli estremi dell'insieme di definizione, asintoti, continuità, derivabilità, punti critici e monotonia, convessità/concavità) la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x^2 + 7}{x - 3}$$

e rappresentatela graficamente nel piano cartesiano.

- ii) Verificate che  $f(x) = x + 3 + \frac{16}{x-3}$  sull'insieme di definizione di  $f$ .

- iii) Calcolate  $\int_0^1 f(x) dx$ .
- 

- 6) Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione rappresentata in figura.

- i) Dite (motivando la risposta) se su  $[0, 2]$  la funzione  $f$  soddisfa le ipotesi e/o la tesi del teorema di Weierstrass.
  - ii) Dite (motivando la risposta) se su  $[0, 2]$  la funzione  $f$  soddisfa le ipotesi e/o la tesi del teorema di esistenza degli zeri.
- 

