

Università di Trento - Facoltà di Scienze Cognitive

CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva

CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione - CdL in Filosofia

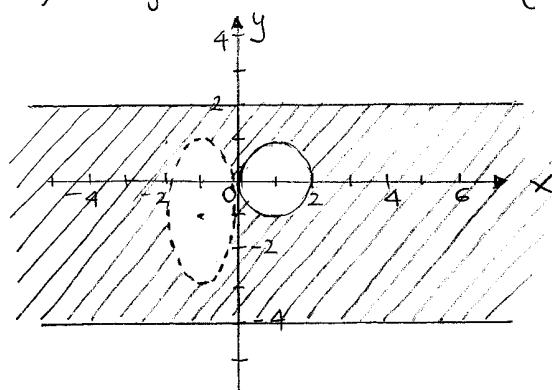
ESAME SCRITTO DI ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)

a.a. 2010-2011 - Rovereto, 16 settembre 2011

FILA (A)

$$1) i) \begin{cases} -4 \leq y \leq 2 \\ 4x^2 + y^2 + 8x + 2y + 1 > 0 \\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq y \leq 2 \\ 4(x^2 + 2x) + y^2 + 2y + 1 > 0 \\ x^2 - 2x + y^2 \geq 0 \end{cases}$$

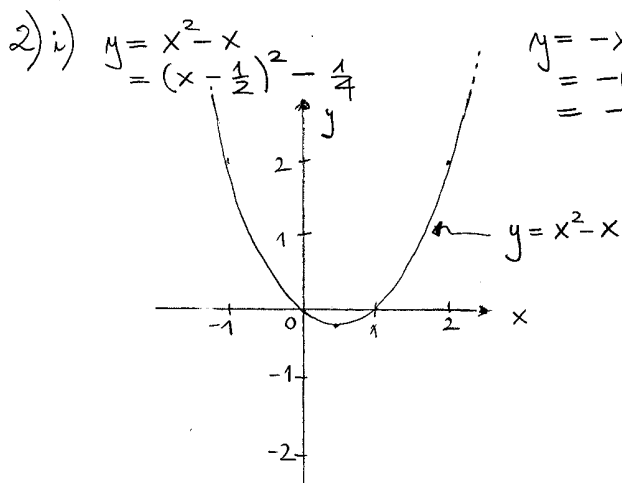
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq y \leq 2 \\ 4(x+1)^2 - 4 + (y+1)^2 > 0 \\ (x-1)^2 - 1 + y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq y \leq 2 \\ (x+1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} > 1 \\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$



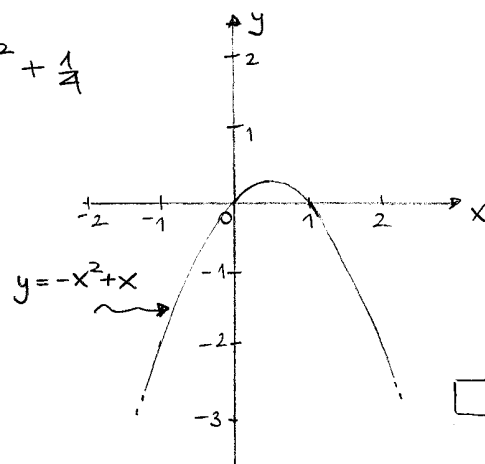
/// = A



ii) $y = k$ con $k < -4$ o $k > 2$.

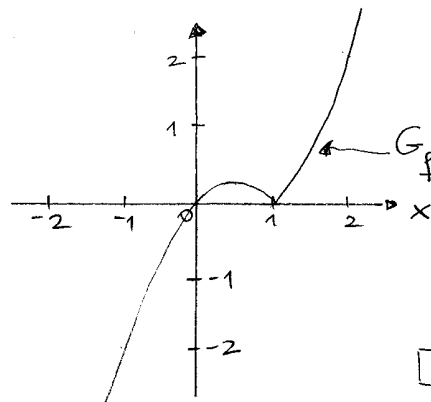


$$y = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$



ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x|x-1|$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-1) = x^2 - x & \text{se } x \geq 1 \\ -x(x-1) = -x^2 + x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$



iii) se $k < 0$ $\exists!$ soluzioni dell'eq. $f(x) = k$;

$k = 0$ Sono 2 soluzioni " ;

$0 < k < \frac{1}{4}$ Sono 3 soluzioni " ;

$k = \frac{1}{4}$ Sono 2 soluzioni " ;

$k > \frac{1}{4}$ $\exists!$ soluzioni dell'eq. $f(x) = k$. □

iv) f non è iniettiva ; basta prendere $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e si ha $x_1 \neq x_2$, mentre $f(x_1) = 0 = f(x_2)$.

Poiché $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, si ha che f è suriettiva. □

$$\begin{aligned} \text{v)} \sum_{n=1}^4 (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right) &= -f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) = 0 + \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{72 - 9 + 16 - 48}{144} = \frac{31}{144} \end{aligned}$$

3) $f(x) = \log_2(x+1)$ $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$.

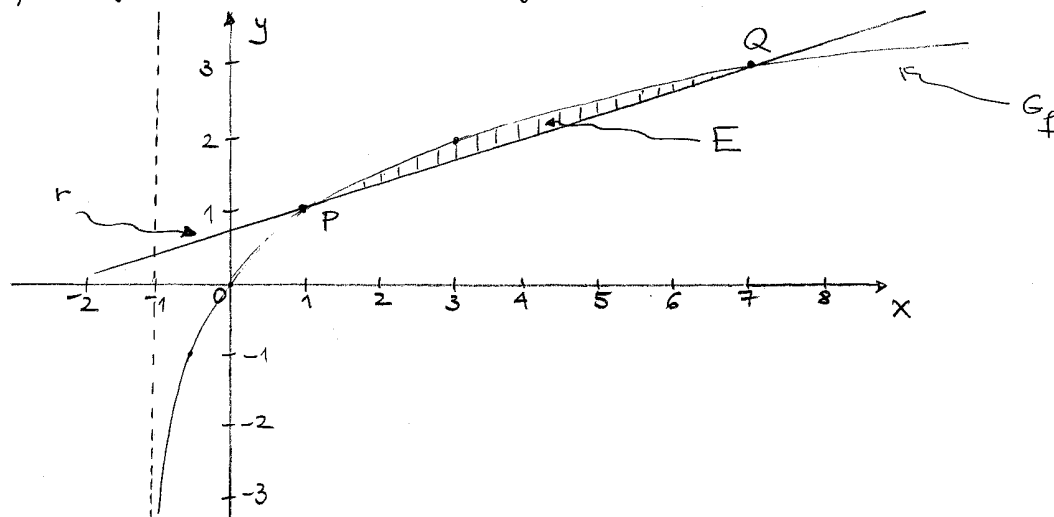
i) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$

$f(0) = \log_2 1 = 0$

$f(1) = \log_2 2 = 1$

$f(3) = \log_2 4 = 2$

$f(7) = \log_2 8 = 3$. □



ii) retta tangente per $P = (1, f(1)) = (1, 1)$ $Q = (7, f(7)) = (7, 3)$:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-1}{7-1} \Leftrightarrow \frac{y-1}{2} = \frac{x-1}{6}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}}$$
□

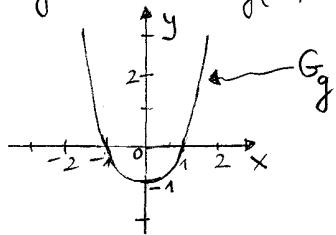
iii) $F(x) = (x+1) \log_2(x+1) - \frac{x}{\log 2}$ è una funzione definita su $]-1, +\infty[$,
è derivabile (composizione, prodotto e somme di funzioni derivabili su $]-1, +\infty[$)

$$F'(x) = \log_2(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log 2} = \log_2(x+1) = f(x)$$

$\forall x \in]-1, +\infty[$, provando così che F è una primitiva di f su $]-1, +\infty[$. $\square$

$$\begin{aligned} \text{iv) area } E &= \int_1^7 \left(f(x) - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \right) dx = F(7) - F(1) - \int_1^7 \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right) dx = \\ &= \left(8 \log_2 8 - \frac{7}{\log 2} \right) - \left(2 \log_2 2 - \frac{1}{\log 2} \right) - \left[\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}x \right]_1^7 = \\ &= 24 - 2 - \frac{6}{\log 2} - \left[\left(\frac{49}{6} + \frac{14}{3} \right) - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \right) \right] = \underline{\underline{10 - \frac{6}{\log 2}}}. \end{aligned}$$

v) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = x^4 - 1$



$g(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[$; osserviamo che $g(0) = -1$, mentre $g(x) > -1 \quad \forall x \neq 0$; quindi

$f \circ g$ ha senso $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e si ha

$$(f \circ g)(x) = f(x^4 - 1) = \underline{\underline{\log_2 x^4}}.$$

4) i) f è crescente su $]-\infty, -2]$, su $[0, 3]$, su $[5, 6]$

è decrescente su $[-2, 0]$, su $[3, 5]$;

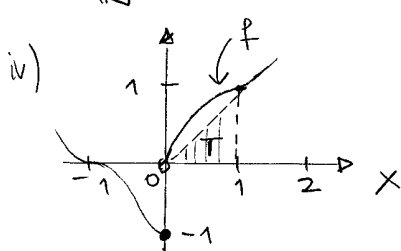
è costante su $[6, +\infty[$. $\square$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= 0; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -1; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1. \quad \square$$

iii) $\max_{\mathbb{R}} f = 2 \quad x = -2, x = 3$ pt. di massimo;

$\min_{\mathbb{R}} f = -1 \quad x = 0, x = 5$ pt. di minimo. $\square$



$$\text{area } T = \frac{1}{2} < \int_0^1 f(x) dx < \text{area } Q = 1,$$

dove Q è il quadrato di vertici $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$.

5) i) $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$

• $\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$ $\square$

• segno f $\frac{-}{-1} \frac{-}{0} \frac{-}{1} \frac{+}{2} \frac{+}{3} \frac{+}{+}$

$$\left. \begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \\ & \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ \text{sono asint.} \\ \text{verticali per } f \end{array}$$

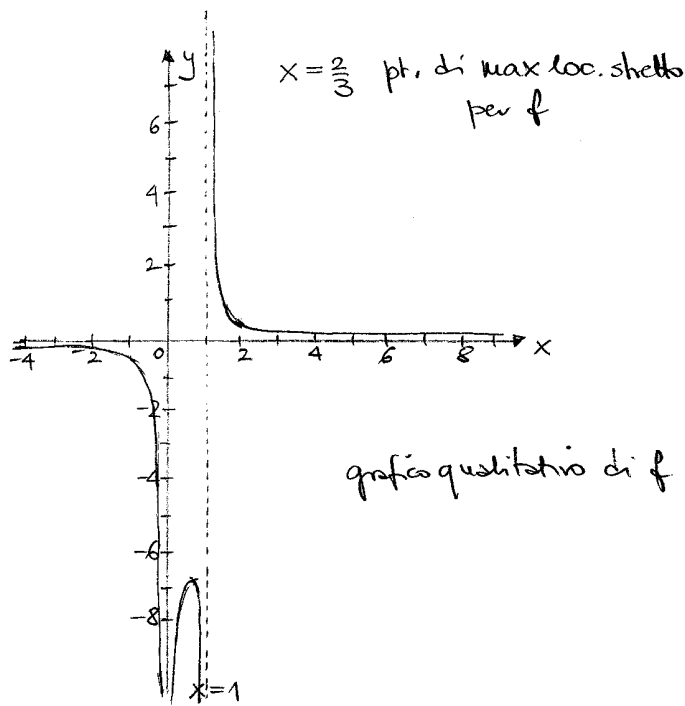
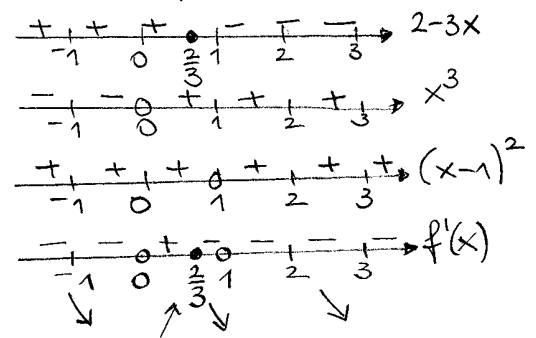
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$y=0$ è asintoto orizz. per f per $x \rightarrow \pm\infty$

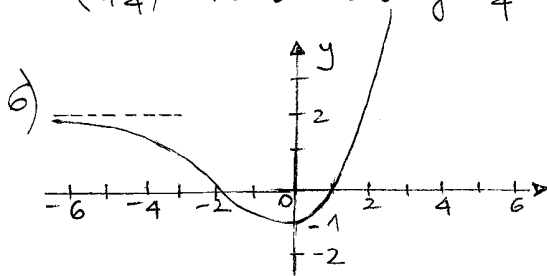
• f è continua nel suo dominio (prodotto e rapporto di funz. continue).

• $\text{dom } f' = \text{dom } f \quad f'(x) = \frac{-2x(x-1) - x^2}{x^4(x-1)^2} = \frac{2-3x}{x^3(x-1)^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ pt. critico $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{\frac{8}{27} \cdot (-\frac{1}{3})} = -\frac{27}{4}$



ii) $f'(2) = \frac{2-6}{8} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$; l'eq. della retta tg. al grafico di f in $(2, \frac{1}{4})$ risulta allora $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}(x-2)$, ossia $\underline{y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}}$.



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

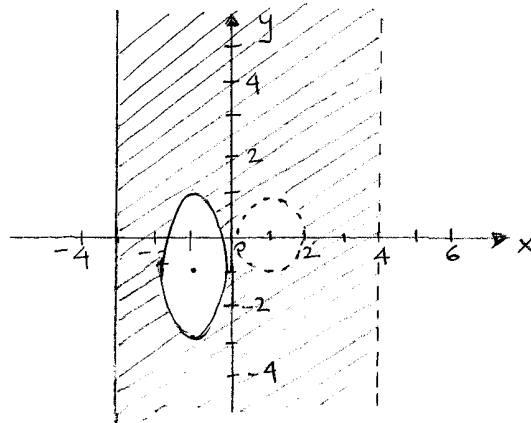
$f'(x) > 0$ su $]0, +\infty[$

$f(0) = -1$; $\int_{-2}^1 f(x) dx < 0$.

FILA (B)

$$1) i) \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ 4x^2 + y^2 + 8x + 2y + 1 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ 4(x^2 + 2x) + y^2 + 2y + 1 \geq 0 \\ x^2 - 2x + y^2 > 0 \end{cases}$$

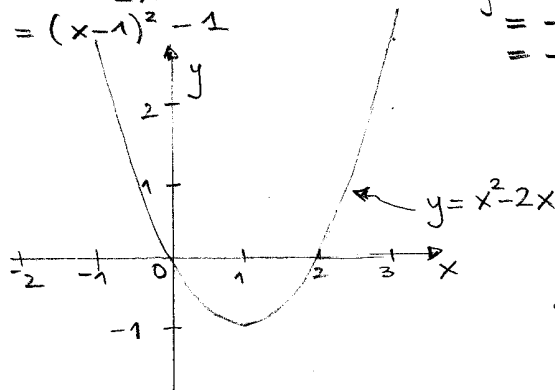
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ 4(x+1)^2 - 4 + (y+1)^2 \geq 0 \\ (x-1)^2 - 1 + y^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x < 4 \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 \geq 1 \\ (x-1)^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$



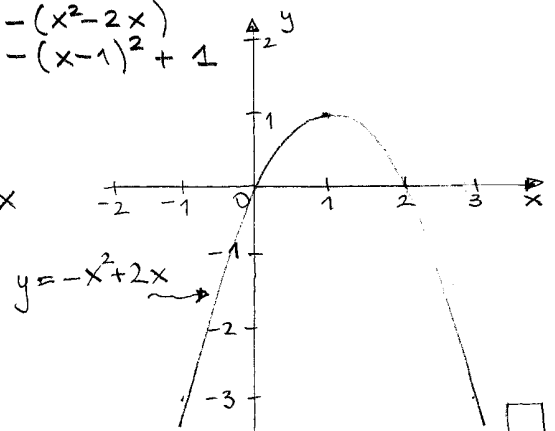
/// = A

ii) $x = k$ con $k < -3$ o $k \geq 4$.

$$2) i) \quad y = x^2 - 2x \\ = (x-1)^2 - 1$$

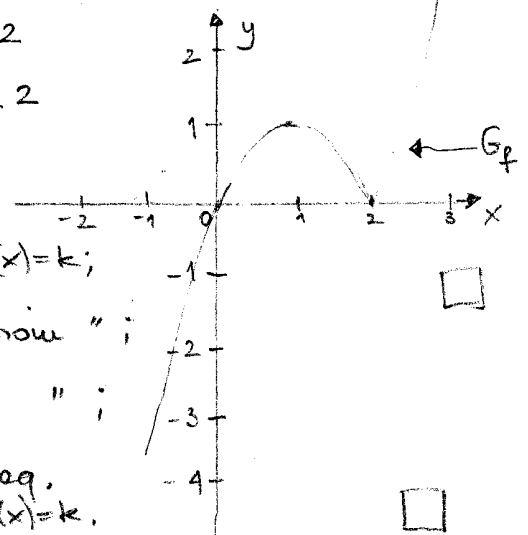


$$y = -x^2 + 2x \\ = -(x^2 - 2x) \\ = -(x-1)^2 + 1$$



ii) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x|x-2|$

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) = x^2 - 2x & \text{se } x \geq 2 \\ -x(x-2) = -x^2 + 2x & \text{se } x < 2 \end{cases}$$



iii) se $k < 0 \exists!$ soluzione dell'eq. $f(x) = k$;

$k = 0, k = 1$, Sono 2 soluzioni " ;

se $0 < k < 1$ Sono 3 soluzioni " ;

$k > 1 \exists!$ soluzione dell'eq. $f(x) = k$.

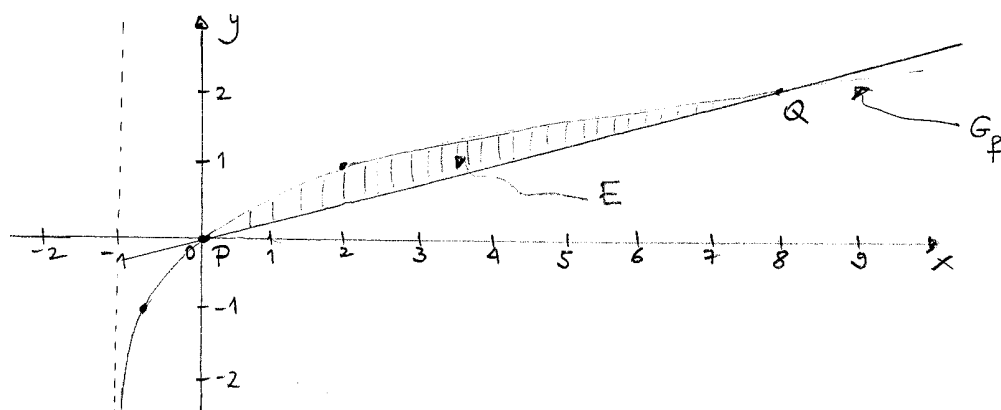
- iv) f non è iniettiva: basta prendere $x_1=0$, $x_2=2$ e si ha $x_1 \neq x_2$, mentre $f(x_1)=0=f(x_2)$.

Poiché $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, si ha che f è suriettiva. □

$$v) \sum_{n=1}^4 (-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right) = -f(1) + f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) = -1 + \left(-\frac{1}{4} + 1\right) - \left(-\frac{1}{9} + \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{5}{9} + \frac{7}{16} = \frac{-36-80+63}{144} = \frac{-53}{144}$$

3) $f(x) = \log_3(x+1)$ $\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} : x+1 > 0\} =]-1, +\infty[$.

i) $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \log_3 \frac{1}{3} = -1$ $f(0) = \log_3 1 = 0$ $f(2) = \log_3 3 = 1$
 $f(8) = \log_3 9 = 2$.



- ii) retta tangente per $P = (0, f(0)) = (0, 0)$ e $Q = (8, f(8)) = (8, 2)$
 ha eq. $y = \frac{1}{4}x$. □

- iii) $F(x) = (x+1) \log_3(x+1) - \frac{x}{\log 3}$ è una funzione definita su $]-1, +\infty[$, è derivabile (composizione, prodotto e somma di funzioni derivabili su $]-1, +\infty[$) e $F'(x) = \log_3(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{\log 3} - \frac{1}{\log 3} = \log_3(x+1) = f(x) \quad \forall x \in]-1, +\infty[$, provando così che F è una primitiva di f su $]-1, +\infty[$. □

iv) $\text{area } E = \int_0^8 (f(x) - \frac{1}{4}x) dx = F(8) - F(0) - \int_0^8 \frac{1}{4}x dx =$
 $= \left(9 \log_3 9 - \frac{8}{\log 3}\right) - \left[\frac{1}{4} \frac{x^2}{2}\right]_0^8 = 18 - \frac{8}{\log 3} - 8 = 10 - \frac{8}{\log 3}$ □

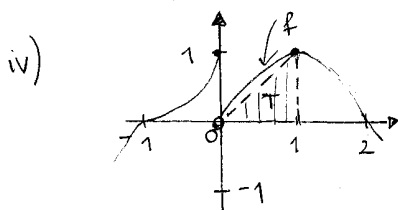
- v) sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g(x) = x^4 - 1$ (vedi Fila (A), Es. 3iv)). Abbiamo
 $(f \circ g)(x) = f(x^4 - 1) = \log_3 x^4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

4) i) f è crescente su $]-\infty, -2[$, su $]-2, 0]$, su $]0, 1]$, su $[4, +\infty[$
è decrescente nell'intervallo $[1, 4]$. $\square$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2$;
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. $\square$

iii) $\nexists \max_{\mathbb{R}} f$; $\nexists \min_{\mathbb{R}} f$.



area $T = \frac{1}{2} < \int_0^1 f(x) dx < \text{area } Q = 1$,

dove Q è il quadrato di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$. $\blacksquare$

5) i) Osserviamo $f(x) = \frac{1}{x^2(1-x)} = -\frac{1}{x^2(x-1)}$, dove $\frac{1}{x^2(x-1)}$ è la

funzione studiata in FILA (A), Es. 5. Il grafico di $f(x) = \frac{1}{x^2(1-x)}$

si ottiene allora dal grafico di $f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}$ rendendo quest'ultimo
simmetrico rispetto all'asse x .

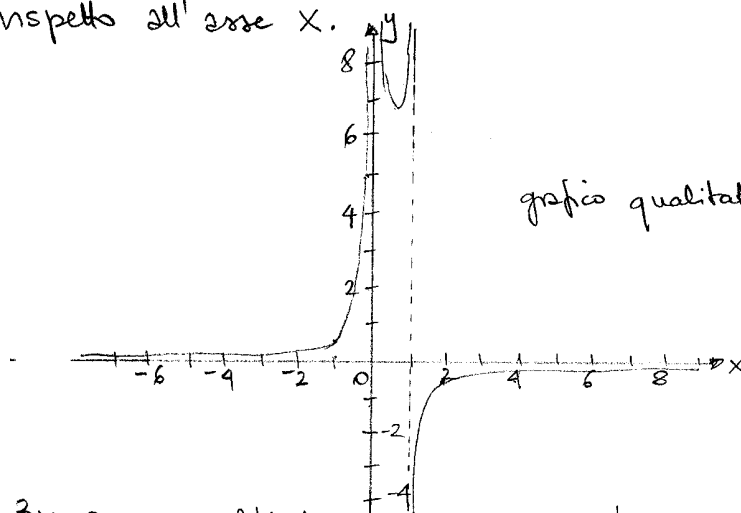
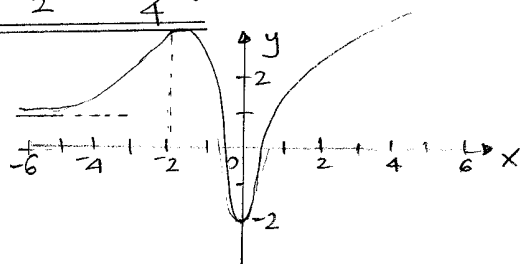


grafico qualitativo di f . $\square$

ii) $f'(x) = \frac{3x-2}{x^3(1-x)^2}$ $f'(2) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; l'eq. della retta tg al
grafico di f in $(2, -\frac{1}{4})$ risulta allora $y = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x-2)$, ossia
 $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$. $\blacksquare$

6)



$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$f'(x) > 0$ su $]0, +\infty[$;

$f(0) = -2$; $\int_{-2}^1 f(x) dx > 0$. $\blacksquare$