Università degli Studi di Trento – Facoltà di Scienze Cognitive
CdL in Scienze e Tecniche di Psicologia Cognitiva
CdL in Interfacce e Tecnologie della Comunicazione – CdL in Filosofia
Seconda Prova Intermedia di ANALISI MATEMATICA (CON ELEMENTI DI ALGEBRA)
a.a. 2010–2011 – Rovereto, 24 gennaio 2011

FILA (A)

1) i) $\dfrac{e^{|x^2-1|}}{e^3} < e^{-1} \iff e^{|x^2-1|} < e^2 \iff |x^2-1| < 2$ (e^x è crescente)

$\iff -2 < x^2-1 < 2 \iff -1 < x^2 < 3$

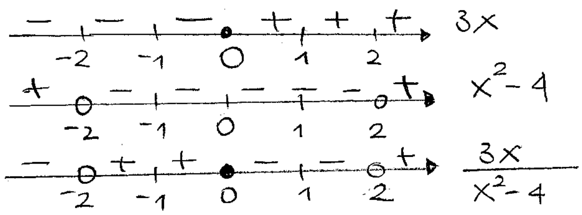
$\Rightarrow \underline{\underline{S =]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[}}.$

$\log_{\frac12}\left(\dfrac{3x}{x^2-4}\right) \geq 0 \iff 0 < \dfrac{3x}{x^2-4} \leq 1$ ($\log_{\frac12} x$ è decrescente)

$$\iff (*) \begin{cases} \dfrac{3x}{x^2-4} > 0 \\ \dfrac{-x^2+3x+4}{x^2-4} \leq 0 \end{cases}$$

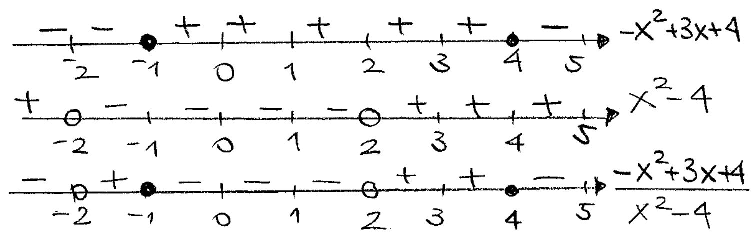
Ora $\dfrac{3x}{x^2-4} > 0 \iff x \in]-2,0[\cup]2,+\infty[= S_1$

infatti:



$\dfrac{-x^2+3x+4}{x^2-4} \leq 0 \iff x \in]-\infty,-2[\cup [-1,2[\cup [4,+\infty[= S_2$

infatti



La soluzione di (*) è $S = S_1 \cap S_2 = \underline{\underline{[-1,0[\cup [4,+\infty[}}.$ $\square$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \int_1^2 \frac{(-1)^n}{x^n}dx = -\int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx - \int_1^2 \frac{1}{x^3}dx + \int_1^2 \frac{1}{x^4}dx =$

$= -\Big[\log|x|\Big]_1^2 + \Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^2 - \Big[-\frac{1}{2x^2}\Big]_1^2 + \Big[-\frac{1}{3x^3}\Big]_1^2 =$

$= -\log 2 + \left(-\cancel{\frac{1}{2}} + 1\right) - \left(-\frac{1}{8} + \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{-\log 2 + \frac{5}{12}}}$ $\blacksquare$

2) i) $\lim_{x\to 2^-} \frac{x \nearrow 2}{\underbrace{x^2-4}_{\text{infinitesimo negativo, per } x\to 2^-}} = \underline{\underline{-\infty}}$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3x^2+1)}{2x} = \underline{\underline{0}}$: infatti, $\log(3x^2+1) = \log\left(x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)\right) =$

$= \log x^2 + \log\left(3+\frac{1}{x^2}\right) =$

$= 2\log|x| + \log\left(3+\frac{1}{x^2}\right)$

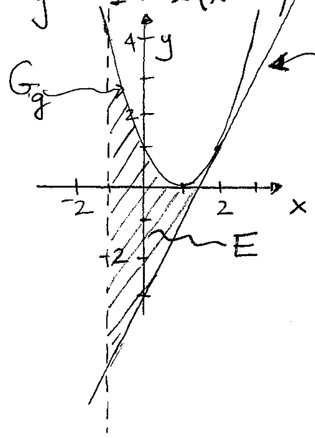
e quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3x^2+1)}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\log|x|}{x} + \frac{\log\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{2x}\right) = 0.$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-2}{x} \nexists$: infatti $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-2 \nearrow -1}{\underbrace{x}_{\text{infinitesimo negativo, per } x\to 0^-}} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-2}{\underbrace{x}_{\text{infinitesimo positivo, per } x\to 0^+}} = -\infty$ □

ii) $g'(x) = 2(x-1)$ $\quad g'(2)=2$

$y = 1 + 2(x-2)$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{y = 2x-3}}$ eq. retta tangente al grafico di g nel pt. $(2,1)$



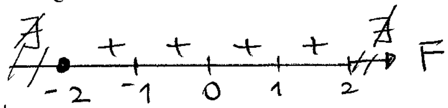
$\text{area } E = \int_{-1}^{2}\left[g(x) - (2x-3)\right]dx = \int_{-1}^{2}(x^2-2x+1-2x+3)dx$

$= \int_{-1}^{2}(x^2-4x+4)dx = \int_{-1}^{2}(x-2)^2 dx =$

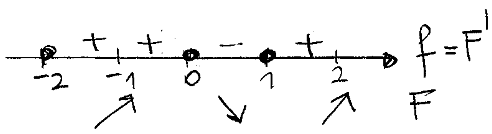
$= \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \underline{9.}$ ■

3) i) Usando l'interpretazione geometrica dell'integrale si ha immediatamente che F è positiva su $]-2,2]$ e $F(-2)=0$. □

ii) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x) = f(x)$ $\forall x\in[-2,2]$



e quindi risulta che



F è crescente su $[-2,0]$

è decrescente su $[0,1]$

è crescente su $[1,2]$

(anche questo fatto si poteva tranquillamente dedurre dalla definizione di F e dalla interpretazione geometrica dell' integrale). ☐

iii) $x=-2$, $x=1$ pt. di min. locale per F

$x=0$, $x=2$ pt. di max. locale per F. ☐

iv) $\min\limits_{[-2,2]} F = F(-2) = \underline{\underline{0}}$

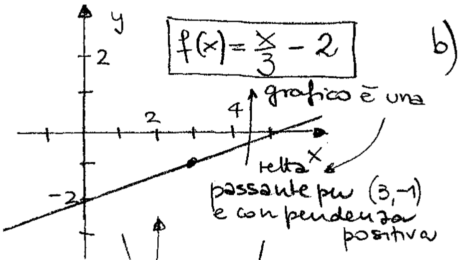
$\max\limits_{[-2,2]} F = F(2) = \underline{\underline{2}}$, poiché

$$F(2) = \underbrace{\int_{-2}^{0} f(t)\,dt}_{>0} + \underbrace{\underbrace{\int_{0}^{1} f(t)\,dt}_{<0} + \underbrace{\int_{1}^{2} f(t)\,dt}_{>0}}_{\text{e questo è maggiore di } 0.}$$

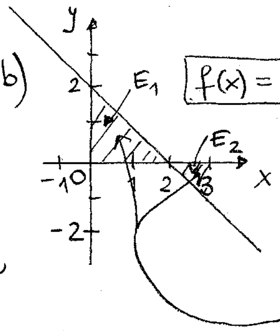
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{5}{4}}}$$ ■

4) <u>Esempi</u>:

a) $\boxed{f(x) = \frac{x}{3} - 2}$



b) $\boxed{f(x) = -x+2}$

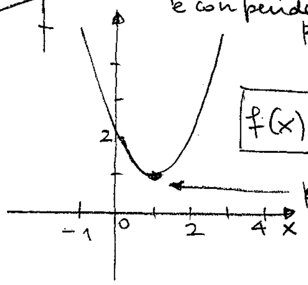


$f(0) = 2$ $f(3) = -1$

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0$$

$\int_0^3 f(x)\,dx$ = area E_1 − area E_2

c) $\boxed{f(x) = (x-1)^2 + 1}$



pt. del grafico con tg. orizzontale

convessa !! con $f'' > 0$ ■

5) $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$

- $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ (poiché $2^x + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)
- segno di f

	-2	-1	0	1	2	
$2^x - 1$	−	−	− 0	+	+	+
$2^x + 1$	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	−	−	− 0	+	+	+

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1} = -1$ (poiché $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$!)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1} = 1$ (infatti $\dfrac{\cancel{2^x}\left(1 - \overbrace{\frac{1}{2^x}}^{\to 0 \text{ per } x\to+\infty}\right)}{\cancel{2^x}\left(1 + \underbrace{\frac{1}{2^x}}_{\to 0}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$)

$\Rightarrow$ $y = -1$ è asintoto orizzontale per f, per $x \to -\infty$,
$y = 1$ è asintoto orizzontale per f, per $x \to +\infty$.

- f è continua su $\mathbb{R}$, essendo rapporto di funzioni continue, e il denominatore non si annulla mai.
- dom $f' = \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{(2^x \log 2)(2^x+1) - (2^x-1)(2^x \log 2)}{(2^x+1)^2} =$

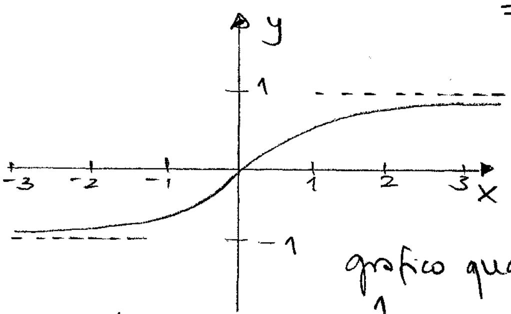
$$= \frac{(2 \cdot \log 2)\, 2^x}{(2^x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La funzione è strett. crescente su $\mathbb{R}$ e non ha pt. critici.

- dom $f'' = \mathbb{R}$ $\qquad f''(x) = (2 \log 2) \cdot \dfrac{(2^x \log 2)(2^x+1)^{\cancel{2}} - 2^x \cdot 2\cancel{(2^x+1)}\, 2^x \log 2}{(2^x+1)^{\cancel{4}\,3}}$

$$= (2 \log 2)\ \frac{2^x \log 2 - (2^x)^2 \log 2}{(2^x+1)^3}$$

$$= \frac{2(\log 2)^2\, 2^x (1 - 2^x)}{(2^x+1)^3} > 0$$



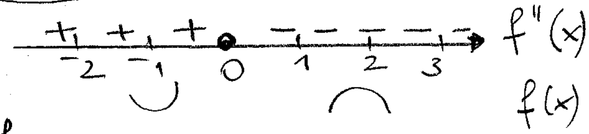


grafico qualitativo di f.

ii) $\displaystyle\int_0^1 (f(x)+1)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{2^x-1}{2^x+1} + 1\right) dx = \int_0^1 \frac{2 \cdot 2^x}{2^x+1}\,dx = \frac{2}{\log 2} \int_0^1 \frac{2^x \log 2}{2^x+1}\,dx$

$$= \frac{2}{\log 2} \Big[\log(2^x+1)\Big]_0^1 = \frac{2}{\log 2} \log \frac{3}{2}.$$

iii) $y = k$ con $k \leq -1$ o $k \geq 1$.

6) $P_5^2 = \dfrac{5!}{2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 60.$

FILA (B)

1) i) $\dfrac{2^{|x^2-4|}}{2^4} \geqslant 2^{-3} \iff 2^{|x^2-4|} \geqslant 2^1 \iff |x^2-4| \geqslant 1$ (2^x è crescente)

$\iff (x^2-4 \leq -1)$ o $(x^2-4 \geqslant 1)$

$\iff x^2 \leq 3$ o $x^2 \geqslant 5$

$\Rightarrow \underline{\underline{S = \left]-\infty, -\sqrt{5}\right] \cup \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{5}, +\infty\right[.}}$

$\log_4\left(\dfrac{3x}{x^2-4}\right) \leq 0 \iff 0 < \dfrac{3x}{x^2-4} \leq 1$ ($\log_4 x$ è crescente)

$\Rightarrow$ (vedi SP1, FILA(A), Es.1i)) $\underline{\underline{S = \left[-1, 0\right[\cup \left[4, +\infty\right[.}}$ $\square$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{4} \int_1^2 \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^3}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^4}\,dx =$

$= \left[\log|x|\right]_1^2 + \left[-\dfrac{1}{x}\right]_1^2 + \left[-\dfrac{1}{2x^2}\right]_1^2 + \left[-\dfrac{1}{3x^3}\right]_1^2 =$

$= \log 2 + \left(-\dfrac{1}{2}+1\right) + \left(-\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{2}\right) + \left(-\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{3}\right) =$

$= \underline{\underline{\log 2 + \dfrac{7}{6}}}$ $\blacksquare$

2) i) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\overset{\to 2}{x}}{\underbrace{x^2-4}_{\text{infinitesimo positivo, per } x\to 2^+}} = \underline{\underline{+\infty}}$

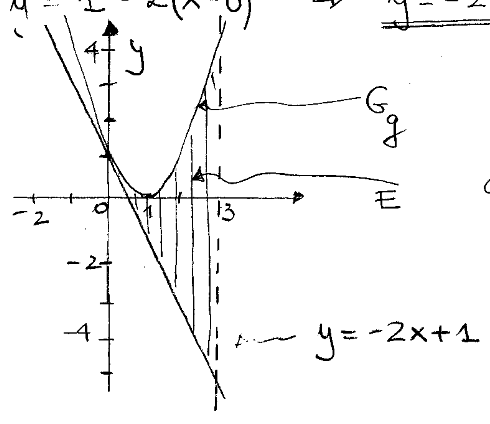
$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\log(3x^4+1)} = \underline{\underline{+\infty}}$ (vedi SP1, FILA(A), Es.2i))

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-2}{x^3} = \nexists$: infatti $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\overset{\to -1}{e^x-2}}{\underbrace{x^3}_{\text{infinitesimo negativo, per } x\to 0^-}} = +\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\overset{\to -1}{e^x-2}}{\underbrace{x^3}_{\text{infinitesimo positivo, per } x\to 0^+}} = -\infty$

ii) $g'(x) = 2(x-1)$ $\quad g'(0) = -2$ $\square$

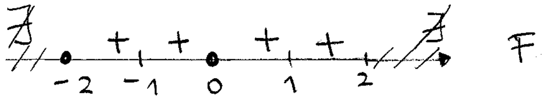
$y = 1 - 2(x-0) \Rightarrow \underline{y = -2x+1}$ eq. retta tg. al grafico di g nel punto $(0,1)$



$\displaystyle \text{area}\,E = \int_0^3 \left[g(x) - (-2x+1)\right]dx = \int_0^3 \left[x^2 - \cancel{2x} + \cancel{1} + \cancel{2x} - \cancel{1}\right]dx$

$= \left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^3 = \underline{\underline{9}}$ $\blacksquare$

3) i) Usando l'interpretazione geometrica dell'integrale si ha immediatamente che F ha il seguente segno:



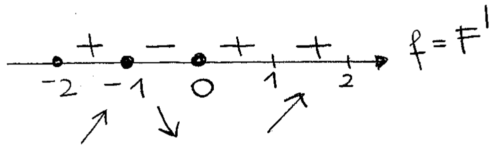
$\square$

ii) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ha $F'(x)=f(x)$ $\forall\, x\in[-2,2]$ e quindi risulta che

F è crescente su $[-2,-1]$

è decrescente su $[-1,0]$

è crescente su $[0,2]$



(anche questo fatto si poteva tranquillamente dedurre dalla definizione di F e dalla interpretazione geometrica dell'integrale). $\square$

iii) $x=-2$, $x=0$ pt. di min. locale per F

$x=-1$, $x=2$ pt. di max. locale per F. $\square$

iv) $\min\limits_{[-2,2]} F = F(-2)=F(0)=0$

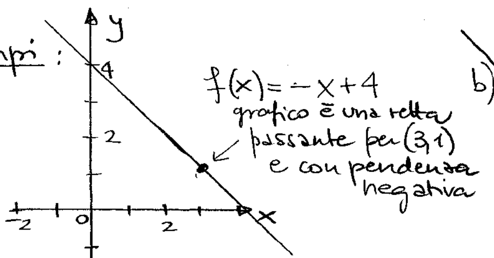
$\max\limits_{[-2,2]} F = F(2)=\underline{\underline{\dfrac{13}{8}}}$ poiché $F(2)=\displaystyle\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \cancel{\int_{-2}^{0} f(t)\,dt}^{\,=0} + \int_{0}^{2} f(t)\,dt$

$= \dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{\frac{1}{2}+2}{2} = \underline{\underline{\dfrac{13}{8}}}$

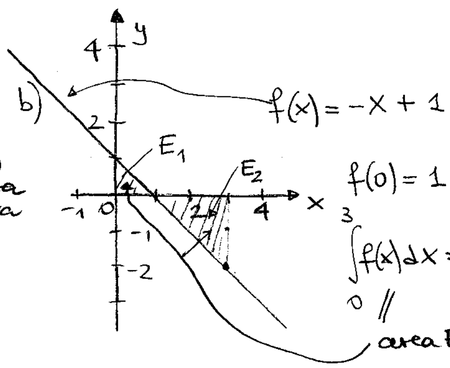
$\blacksquare$

4) Esempi:

a)



b)



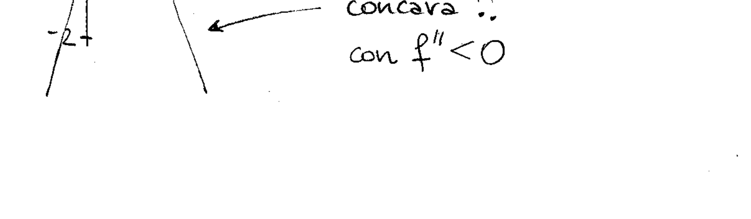
$f(0)=1 \quad f(3)=-2$

$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{1}{2}-2 = -\frac{3}{2} < 0$

$\parallel$

area E_1 − area E_2

c)



$\blacksquare$

5) $f(x) = \dfrac{2\cdot 2^x}{2^x+1}$

- $\text{dom} f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ (poiché $2^x+1>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$)
- segno di f : $f(x)>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2\cdot 2^x}{2^x+1} = \underline{\underline{0}}$ (poiché $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$!)

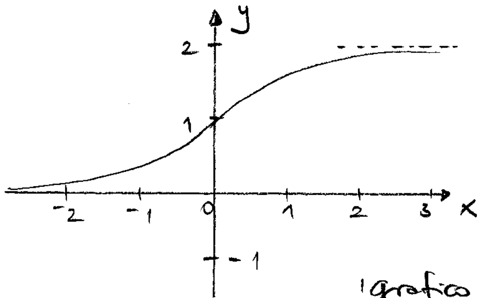
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cdot 2^x}{2^x+1} = \underline{\underline{2}}$ (infatti $\dfrac{\cancel{2^x}\cdot 2}{\cancel{2^x}(1+\underbrace{\tfrac{1}{2^x}}_{\to 0})} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$)

$\Rightarrow$ $y=0$ è asintoto orizzontale per f, per $x\to-\infty$,
$y=2$ è asintoto orizzontale per f, per $x\to+\infty$.

- f è continua in $\mathbb{R}$, essendo rapporto di funzioni continue, e il denominatore non si annulla mai.
- $\text{dom} f' = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 2\cdot\dfrac{(2^x\log 2)(2^x+1) - 2^x\cdot 2^x\log 2}{(2^x+1)^2} = 2\,\dfrac{2^x\log 2}{(2^x+1)^2} > 0$

  $\forall x\in\mathbb{R}$

  La funzione è strett. crescente in $\mathbb{R}$ e non ha punti critici.
- $\text{dom} f'' = \mathbb{R}$ $\quad f''(x) = (2\log 2)\cdot\dfrac{(2^x\log 2)(2^x+1)^{\cancel{2}} - 2^x\cdot 2(\cancel{2^x+1})\cdot 2^x\log 2}{(2^x+1)^{\cancel{4}\,3}}$

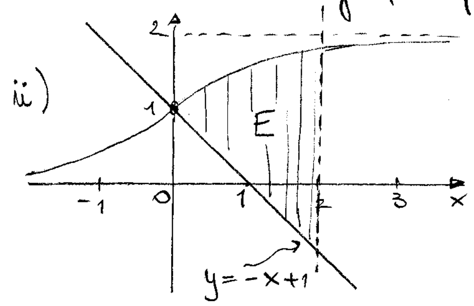


$= 2(\log 2)^2\, 2^x\,\dfrac{(1-2^x)}{(2^x+1)^3} > 0$

-2	-1	0	1	2	
$+$	$+$	•	$-$	$-$	$f''(x)$
$\cup$			$\cap$		$f(x)$

grafico qualitativo di f

ii)



$$\text{area } E = \int_0^2 \left[f(x) - (-x+1)\right] dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{2\cdot 2^x}{2^x+1}\,dx + \int_0^2 (x-1)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\log 2}\int_0^2 \frac{2^x\log 2}{2^x+1}\,dx + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 =$$

$$= \frac{2}{\log 2}\left[\log(2^x+1)\right]_0^2 + (\cancel{2-2}) = \underline{\underline{\frac{2}{\log 2}\log\frac{5}{2}}}.$$

iii) $y=k$ con $k\le 0$ o $k\ge 2$.

6) $P_6^{2,2} = \dfrac{6!}{2!\,2!} = \dfrac{6\cdot 5\cdot \cancel{4}^{\,2}\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}\,\cancel{2!}} = \underline{180}$